COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 12 mai 2012

Clasa a VI-a – Soluții şi barem

Subiectul 1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația

$$x,(y)+y,(z)+z,(x)=5,0(5)+0,x+0,y+0,z.$$

Soluție:

$x+\frac{y}{9}+y+\frac{z}{9}+z+\frac{x}{9}=5\frac{5}{90}+\frac{x}{10}+\frac{y}{10}+\frac{z}{10}$ **(2p)**

$(x+y+z)\left(\frac{10}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{455}{90}$ **(3p)**

$x+y+z=5$ **(1p)**

Se obțin soluțiile $S=\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$ **(1p)**

Subiectul 2. O mulțime nevidă $A\subset\mathbb{N}^*$ o vom numi „perfectă” dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului de elemente.

a) Determinați mulțimile perfecte cu trei elemente.

b) Arătați că orice mulțime perfectă conține cel puțin un număr impar.

Soluție:

a) $A=\{a,b,c\}$, $a+b+c=9$, $a,b,c\in\mathbb{N}^*$

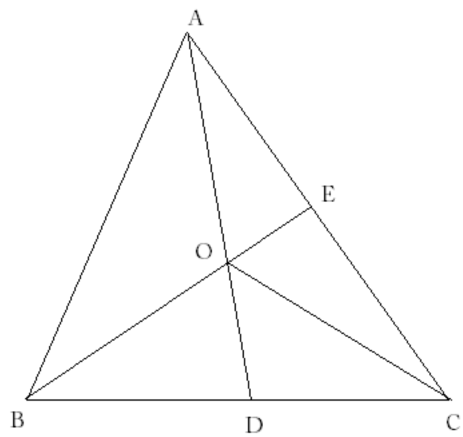
Se obțin soluțiile $\{1,2,6\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$ **(3p)**

b) Presupunem prin reducere la absurd că $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ mulțime „perfectă” cu elementele pare

Atunci $k^2=a_1+a_2+...+a_k\geq 2+4+...+2k=2\cdot\frac{k(k+1)}{2}=k^2+k>k^2$ (Contradicție!) **(4p)**

Subiectul 3. Fie triunghiul ABC şi O un punct în interiorul său. Dacă $OA \cap BC = \{D\}$, $BO \cap AC = \{E\}$ şi $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA$ şi $\sphericalangle COE \equiv \sphericalangle COD$, arătați că $CO \perp AB$.

Soluție:



Din $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA$ rezultă că ΔOAB este isoscel şi atunci $[AO] \equiv [BO]$ **(1p)**

Din $\sphericalangle COE \equiv \sphericalangle COD$ şi $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle BOD$ (opuse la vârf) se obține $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC$ **(1p)**

Din $\left.\begin{array}{l} [AO] \equiv [OB] \\ \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC \\ [OC] \equiv [OC] \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOC \equiv \Delta BOC \quad (L.U.L.)$ **(3p)**

=> $[CA] \equiv [CB]$ şi CO bisectoare **(1p)**

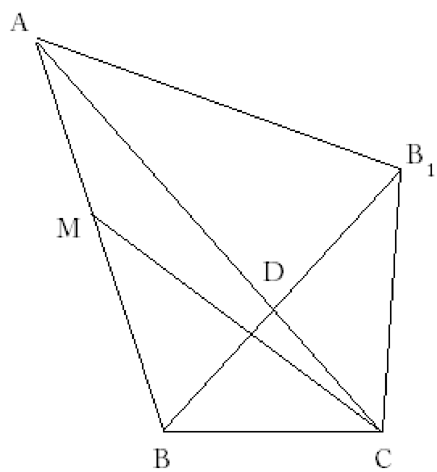
Atunci CO este înălțime şi de aici $CO \perp AB$ **(1p)**

Subiectul 4. Fie triunghiul ABC astfel încât $m(\hat{B}) = 2 \cdot m(\hat{C})$ şi există $M \in (AB)$ astfel încât $MB = BC$.

a) Fie B_1 simetricul lui B față de AC. Arătați că $MC = BB_1$.

b) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC dacă $AB = MC$.

Soluție:



a) Fie $\{D\} = AC \cap BB_1$

Atunci CD este mediană şi înălțime în ΔBCB_1 => CD este bisectoare şi $BC = B_1C$ **(1p)**

Din $m(\hat{B}) = 2 \cdot m(\hat{C})$ se obține $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle BCB_1$ **(1p)**

Din $\left.\begin{array}{l} [MB] \equiv [BC] \\ \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle BCB_1 \\ [BC] \equiv [B_1C] \end{array}\right\}$ => $\Delta MBC \equiv \Delta BCB_1$ $(L.U.L.)$ => $MC = BB_1$ **(2p)**

b) AD este mediană şi înălțime în ΔBAB_1 => CD este bisectoare şi $AB = AB_1$

Din $AB = MC = BB_1$ se obține ΔBAB_1 echilateral **(1p)**

Atunci $m(\sphericalangle BAC) = 30°$

Din $m(\hat{B}) = 2 \cdot m(\hat{C})$ se obține $m(\sphericalangle ABC) = 100°$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 50°$ **(2p)**