Concursul naţional de matematică UNIREA 2016

Ediţia a 15-a

Focşani, Ianuarie 2016

Clasa a 9-a

Problema 1. Fie $x, y, z, t > 0$ astfel încât $x + y + z + t = 4$. Demonstraţi că:

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{t} + t\sqrt{x} \leq 4.$$

Problema 2. Fie trei progresii aritmetice neconstante infinte de numere naturale şi A, B, respectiv C mulţimile termenilor acestora. Se ştie că $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$ şi că mulţimile $\mathbb{N} - (A \cup B), \mathbb{N} - (B \cup C)$ şi $\mathbb{N} - (C \cup A)$ sunt infinite.

(a) Dacă $m \leq n \leq p$ sunt raţiile celor trei progresii, arătaţi că $m \geq 2$ şi $n \geq 3$.
(b) Arătaţi că A, B şi C sunt disjuncte două câte două.
(c) Determinaţi toate seturile de câte trei progresii care verifică condiţiile date.

Problema 3. Fie AA', BB' şi CC' înălţimile triunghiului ascuţitunghic ABC şi H_A, H_B şi H_C ortocentrele triunghiurilor $AB'C'$, $BA'C'$ respectiv $CA'B'$.

(a) Arătaţi că triunghiurile $H_AH_BH_C$ şi $A'B'C'$ sunt congruente.
(b) Arătaţi că dreptele AH_A, BH_B şi CH_C sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Problema 4. Fie $ABCDE$ pentagon regulat de centru O. Pentru fiecare latură a sa, considerăm câte un segment paralel cu aceasta ce are capetele pe cele două laturi adiacente. Aceste 5 segmente sunt concurente într-un punct P ce le împarte pe fiecare în câte două subsegmente ale căror lungimi au diferenţa cel mult 1.

Demonstraţi că $OP \leq 1$.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte