Concursul naţional de matematică UNIREA 2016

Ediţia a 15-a

Focşani, Ianuarie 2016

Clasa a 9-a - BAREM

Problema 1. Fie $x, y, z, t > 0$ astfel încât $x + y + z + t = 4$. Demonstraţi că:

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{t} + t\sqrt{x} \le 4.$$

Gabriel Mârşanu

Soluţie:

$\sum x\sqrt{y} \le \sum x\frac{y+1}{2} = \frac{\sum xy}{2} + 2$. **(4p)**
$\frac{\sum xy}{2} = \frac{(x+z)(y+t)}{2} \le \frac{(\frac{x+y+z+t}{2})^2}{2} = 2$. **(3p)**

Soluţie alternativă:

Din CBS avem $(\sum a_i b_i)^2 \le \sum a_i^2 \sum b_i^2$ **(1p)**
Rescriem $\sum\limits_{ciclic} x\sqrt{y} = \sum\limits_{ciclic} \sqrt{x}\sqrt{xy}$ **(2p)**
Deci $(\sum\limits_{ciclic} \sqrt{x}\sqrt{xy})^2 \le 4(x+z)(y+t)$ **(2p)**
Dar $(x+z)(y+t) \le [\frac{(x+z)+(y+t)}{2}]^2 = 4$ **(1p)**
Deci $\sum\limits_{ciclic} x\sqrt{y} \le 4$. **(1p)**

Problema 2. Fie trei progresii artimetice neconstante infinte de numere naturale şi A, B, respectiv C mulţimile termenilor acestora. Se ştie că $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$ şi că mulţimile $\mathbb{N} - (A \cup B), \mathbb{N} - (B \cup C)$ şi $\mathbb{N} - (C \cup A)$ sunt infinite.

(a) Dacă $m \le n \le p$ sunt raţiile celor trei progresii, arătaţi că $m \ge 2$ şi $n \ge 3$.
(b) Arătaţi că A, B şi C sunt disjuncte două câte două.
(c) Determinaţi toate seturile de câte trei progresii care verifică condiţiile date.

Cristi Săvescu

Soluţie:

(a) Dacă $m = 1$, atunci progresia cu raţie m (să zicem A) va conţine toate numerele naturale mai mari decât primul ei termen, deci $\mathbb{N} - A$ este finită, deci $\mathbb{N} - (A \cup B)$ este finită - contradicţie. Deci $m \geq 2$. **(1p)**

Dacă $n = 2$, atunci $m = 2$. Dacă primii termeni ai lor au parităţi diferite, ele acoperă toate numerele naturale mai mari ca cel mai mare prim termen al lor, deci $\mathbb{N} - (A \cup B)$ este finită - fals. **(1p)**
Dacă primii lor termeni au aceaşi paritate, atunci cea de-a treia progresie trebuie să conţină toate numerele de paritate diferită, deci ar acoperi împreună cu una dintre primele două progresii tot $\mathbb{N}$ - fals. Deci $n \geq 3$. **(1p)**

(b) Presupunem prin R.A. că $A \cap B \neq \emptyset$. Considerăm $x \in A \cap B$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că raţiile celor două progresii sunt $a \leq b$. Dacă $a \geq 3$, atunci $x+1, x+2 \notin A$ şi $x+1, x+2 \notin B$, deci $x+1, x+2 \in C \Rightarrow c = 1$ - contradicţie. Deci $a = 2$. **(1p)**

Conform (a), $b \geq 3$. Dacă $b = 3$, atunci $x+5, x+7 \notin B$ şi $x+5, x+7 \notin A$, deci $x+5, x+7 \in C \Rightarrow c = 2$. Dar, conform (a), $c \geq 3$ - contradicţie. **(1p)**

Dacă $b \geq 4$ atunci $x+1, x+3 \notin A$ şi $x+1, x+3 \notin B$, deci $x+1, x+3 \in C \Rightarrow c = 2$, contradicţie cu (a). Deci $A \cap B = \emptyset$. Analog $B \cap C = \emptyset, C \cap A = \emptyset$.**(1p)**

(c) Conform principiului cutiei, două dintre numerele $0, 1, 2, 3$ aparţin aceleiaşi progresii (să zicem A).

Dacă A are raţia 3, atunci $A = \{3k | k \in \mathbb{N}\}$. Presupunem f.r.g că $1 \in B$. Atunci $b \neq 2$ (altfel $3 \in B$), deci $b \geq 3$. Dacă $b \geq 4$, atunci $2, 4 \in C \Rightarrow 6 \in C$. Dar $6 \in A$ - contradicţie. Deci $b = 3$. Atunci $B = \{3k+1 | k \in \mathbb{N}\}$ şi $2, 5 \in C$, deci $C = \{3k+2 | k \in \mathbb{N}\}$. Dacă A are raţia 2, atunci $A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$ sau $A = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$. Dacă $A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$, atunci $B \cup C = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$, deci b, c sunt pare. Conform (a), $b \geq 4, c \geq 4$. Dacă $b \geq 6$ din $x \in B$ rezultă $x+2, x+4 \notin B$, deci $x+2, x+4 \in C \Rightarrow c = 2$ - contradicţie, deci $b = 4$ şi analog $c = 4$. Atunci $B = \{4k+1 | k \in \mathbb{N}\}$ şi $C = \{4k+3 | k \in \mathbb{N}\}$ sau invers. Cazul $A = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$ conduce analog la $B = \{4k | k \in \mathbb{N}\}$ şi $C = \{4k+2 | k \in \mathbb{N}\}$ sau invers. **(1p)**

Problema 3. Fie AA', BB' şi CC' înălţimile triunghiului ascuţitunghic ABC şi H_A, H_B şi H_C ortocentrele triunghiurilor $AB'C'$, $BA'C'$ respectiv $CA'B'$.

(a) Arătaţi că triunghiurile $H_A H_B H_C$ şi $A'B'C'$ sunt congruente.
(b) Arătaţi că dreptele AH_A, BH_B şi CH_C sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Gabriel Mârşanu

Soluţie:

(a) Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi O_A, O_B, O_C centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $AB'C'$, $BA'C'$ respectiv $CA'B'$. Atunci O_A, O_B, O_C sunt respectiv centrele segmentelelor $[AH], [BH]$ şi $[CH]$. Deci $\overrightarrow{O_AO_B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ şi similarele **(1p)**

Din Sylvester $\overrightarrow{O_AH_A} = \overrightarrow{O_AA} + \overrightarrow{O_AB'} + \overrightarrow{O_AC'}; \overrightarrow{H_BO_B} = \overrightarrow{BO_B} + \overrightarrow{A'O_B} + \overrightarrow{C'O_B}$ **(1p)**
Adunând aceste relaţii şi $\overrightarrow{O_BO_A}$ obţinem $\overrightarrow{H_BH_A} = \overrightarrow{O_AA} + \overrightarrow{O_AB'} + \overrightarrow{O_AC'} + \overrightarrow{BO_B} + \overrightarrow{A'O_B} + \overrightarrow{C'O_B} + \overrightarrow{O_BO_A} = \overrightarrow{O_AA} + \overrightarrow{O_AB'} + \overrightarrow{BO_B} + \overrightarrow{A'O_B} = \overrightarrow{A'B'} + 2\overrightarrow{O_AO_B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A'B'}$.
Analog $\overrightarrow{H_CH_B} = \overrightarrow{B'C'}$ deci $\Delta H_AH_BH_C \equiv \Delta A'B'C'$. **(2p)**

(b) Dreptele AH_A, BH_B şi CH_C sunt concurente într-un punct O' întrucât sunt perpendiculare pe antiparalele la laturile ΔABC **(1p)**
Atunci $\angle O'AB = 90^0 - \angle AB'C = 90^0 - \angle ABC = 90^0 - \angle A'B'C = \angle ACO'$, deci $O'A = O'C$. Analog $O'A = O'B$, deci O' e centrul cercului circumscris ΔABC **(2p)**.

Soluţie alternativă (a):

Avem $A'H_C||B'H$ şi $B'H_C||A'H$ deci $A'HB'H_C$ paralelogram. Analog $B'HC'H_A$ şi $C'HA'H_B$ paralelograme, deci $A'H_C||HB'||C'H_A$ şi $A'H_C = HB' = C'H_A$, deci $A'H_CH_AC'$ paralelogram, de unde $H_AH_C = A'C'$. Analog $H_AH_B = A'B'$ şi $H_BH_C = B'C'$, de unde concluzia. **(4p)**

Problema 4. Fie $ABCDE$ pentagon regulat de centru O. Pentru fiecare latură a sa considerăm câte un segment paralel cu aceasta ce are capetele pe cele două laturi adiacente. Se ştie că aceste cinci segmente sunt concurente într-un punct P care le împarte pe fiecare în câte două subsegmente ale căror lungimi au diferenţa cu cel mult 1. Demonstraţi că $OP \leq 1$.

Cristi Săvescu

Soluţie:

Fie $A_1B_1||AB, B_2C_1||BC, C_2D_1||CD, D_2E_1||DE, E_2A_2||EA$ unde $A_2, B_2 \in [AB], B_1, C_2 \in [BC], C_1, D_2 \in [CD]$, $D_1, E_2 \in [DE], A_1, E_1 \in [AE]$.

Atunci, din ipoteză $|\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1}| \leq 1$ şi similarele **(3p)**.

Deci $|(\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1})+(\overrightarrow{PB_2}+\overrightarrow{PC_1})+...+(\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PE_2})| \leq |\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}|+... \leq 5.(1)$ **(1p)**

Dar $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PA}$ şi analoagele **(1p)**, deci

$$\sum_{X\in\{A_1,A_2,...,E_2\}} \overrightarrow{PX} = \sum_{ciclic} \overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2} = \sum_{ciclic} \overrightarrow{PA} = 5\overrightarrow{PO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+...+\overrightarrow{OE}) = 5\overrightarrow{PO}(2).\mathbf{(1p)}$$

Din (1) şi (2) $|5\overrightarrow{PO}| \leq 5$, deci $PO \leq 1$.**(1p)**