Concursul naţional de matematică UNIREA 2016

Ediţia a 15-a

Focşani, Ianuarie 2016

Clasa a 8-a

Problema 1. Fie $k \in \mathbb{N}$ şi ecuaţia $x^2 + 4y^4 + 9z^8 = 2xy + 3xz + 6yz + k$.

(a) Pentru $k = 3$, rezolvaţi ecuaţia în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(b) Determinaţi $k \in \mathbb{N}$ pentru care ecuaţia are o singură soluţie în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Problema 2. Se dă mulţimea

$$A = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{N}, a, b > 2, \frac{a-2}{b+2}, \frac{a-1}{b+1}, \frac{a}{b}, \frac{a+1}{b-1}, \frac{a+2}{b-2} \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Arătaţi că A este nevidă.
(b) Dacă $(a,b) \in A$, arătaţi că $a + b$ este divizibil cu 60.
(c) Arătaţi că A este infintă.

Problema 3. Fie A, B, C, D puncte necoplanare astfel încât $AD = 6cm, BC = 3cm$ şi $M \in (AB), N \in (CD)$ cu $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 2$.

Demonstraţi că $m(\angle(BC, MN)) = m(\angle(AD, MN))$.

Problema 4. Fie tetraedtrul $ABCD$ şi M, N, E, F mijloacele segmentelor $[BC], [CD], [AM]$ respectiv $[AN]$ iar G centrul de greutate al triunghiului BCD.

Demonstraţi că planele (BEG) şi (DFG) intersectează planul (ABD) după două drepte paralele.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte