Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"

Focșani, 2016

Clasa a VIII-a, SOLUȚII

Subiectul 1. Fie $k \in \mathbb{N}$ și ecuația $x^2 + 4y^4 + 9z^8 = 2xy + 3xz + 6yz + k.$

a) Pentru $k = 3,$ să se rezolve ecuația în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$

b) Pentru $k = 2016,$ să se rezolve ecuația în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$

c) Să se determine $k \in \mathbb{N}$ astfel încât ecuația să aibă o singură soluție în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. $x^2 + 4y^4 + 9z^8 = 2xy + 3xz + 6yz + k \Leftrightarrow x^2 + 4y^4 + 9z^8 - 2xy - 3xz - 6yz = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 3xz - 6yz + 4y^4 - 4y^2 + 9z^8 - 9z^2 = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2x^2 + 8y^2 + 18z^2 - 4xy - 6xz - 12yz\right) + 4y^4 - 4y^2 + 9z^8 - 9z^2 = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\left(x-2y\right)^2 + \left(x-3z\right)^2 + \left(2y-3z\right)^2\right] + 4y^2\left(y^2-1\right) + 9z^2\left(z^6-1\right) = k.$

a) Pentru $k = 3 \Rightarrow 4y^2\left(y^2-1\right) \le 3$ și $9z^2\left(z^6-1\right) \le 3 \Leftrightarrow y^2\left(y^2-1\right) \le \frac{3}{4}$ și $z^2\left(z^6-1\right) \le \frac{1}{3}.$

Dar $y \in \mathbb{N}$ și $z \in \mathbb{N} \Rightarrow y^2\left(y^2-1\right) = 0$ și $z^2\left(z^6-1\right) = 0 \Rightarrow y \in \{0,1\}$ și $z \in \{0,1\}$. În plus, $\left(x-2y\right)^2 + \left(x-3z\right)^2 + \left(2y-3z\right)^2 = 6.$

I. $y = 0,\ z = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 = 6 \Leftrightarrow 2x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{N};$

II. $y = 0,\ z = 1 \Rightarrow x^2 + \left(x-3\right)^2 + 9 = 6 \Leftrightarrow x^2 + \left(x-3\right)^2 = -3 < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții;

III. $y = 1,\ z = 0 \Rightarrow \left(x-2\right)^2 + x^2 + 4 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4 - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1;$

IV. $y = 1,\ z = 1 \Rightarrow \left(x-2\right)^2 + \left(x-3\right)^2 + 1 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 - 6x + 9 - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x-4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4.$

Deci $\left(x, y, z\right) \in \left\{\left(1,1,0\right), \left(1,1,1\right), \left(4,1,1\right)\right\}.$

b) Pentru $k = 2016,$ avem

$\frac{1}{2}\left[\left(x-2y\right)^2 + \left(x-3z\right)^2 + \left(2y-3z\right)^2\right] + 4y^2\left(y^2-1\right) + 9z^2\left(z^6-1\right) = 2016 \Rightarrow 9z^2\left(z^6-1\right) \le 2016.$

Dacă $z^2 \geq 4 \Rightarrow 9z^2\left(z^6-1\right) \geq 9 \cdot 4 \cdot (64-1) = 2268,$ fals!

$\Rightarrow z^2 < 4 \Rightarrow z \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow 9z^2\left(z^6-1\right) = 0.$ Obținem

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x-2y)^2+(x-3z)^2+(2y-3z)^2\right]+4y^2\left(y^2-1\right)=2016 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^2+(x-3z)^2+(2y-3z)^2+8y^2\left(y^2-1\right)=4032 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2y)^2+(x-3z)^2+(2y-3z)^2 \in M_4.$$

În general, $a^2 \in M_4$ sau $a^2 \in M_4+1,\ \forall a \in \mathbb{Z},$ iar din $a^2+b^2+c^2 \in M_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 \in M_4,\ b^2 \in M_4,\ c^2 \in M_4 \Rightarrow a, b, c$ numere pare.

Deci $x-2y,\ x-3z,\ 2y-3z$ nr. pare $\Rightarrow z=0$ și x nr. par $x=2x_1,\ x_1 \in \mathbb{Z}.$ Obținem

$$\left(2x_1-2y\right)^2+\left(2x_1\right)^2+(2y)^2+8y^2\left(y^2-1\right)=4032 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x_1-y\right)^2+4{x_1}^2+4y^2+8y^2\left(y^2-1\right)=4032 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1-y\right)^2+{x_1}^2+y^2+2y^2\left(y^2-1\right)=1008.$$

Dar $y^2\left(y^2-1\right)$ nr. par $\Rightarrow \left(x_1-y\right)^2+{x_1}^2+y^2 \in M_4 \Rightarrow x_1, y$ nr. pare $\Rightarrow x_1=2x_2,\ \ y=2y_2,$

$x_2, y_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4\left(x_2-y_2\right)^2+4x_2^2+4y_2^2+2\cdot 4y_2^2\left(4y_2^2-1\right)=1008 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x_2-y_2\right)^2+x_2^2+y_2^2+2y_2^2\left(4y_2^2-1\right)=252 \Rightarrow 2y_2^2\left(4y_2^2-1\right) \leq 252 \Leftrightarrow y_2^2\left(4y_2^2-1\right) \leq 126.$

Dacă $y_2^2 \geq 9 \Rightarrow y_2^2\left(4y_2^2-1\right) \geq 9 \cdot 35 = 315,$ fals $\Rightarrow y_2^2 < 9 \Rightarrow y_2^2 \in \{0, 1, 4\}.$

1) Dacă $y_2^2=0 \Rightarrow x_2^2+x_2^2=252 \Rightarrow x_2^2=126 \Rightarrow x_2=\pm\sqrt{126} \notin \mathbb{Z}.$

2) Dacă $y_2^2=1 \Rightarrow y_2=\pm 1 \Rightarrow \left(x_2 \mp 1\right)^2+x_2^2+1+6=252 \Leftrightarrow \left(x_2 \mp 1\right)^2+x_2^2=245 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_2^2 \mp 2x_2+1=245 \Leftrightarrow x_2^2 \mp x_2-122=0$ cu $\Delta=489 \Rightarrow x_2 \notin \mathbb{Z}.$

3) Dacă

$y_2^2=4 \Rightarrow y_2=\pm 2 \Rightarrow \left(x_2 \mp 2\right)^2+x_2^2+4+120=252 \Leftrightarrow \left(x_2 \mp 2\right)^2+x_2^2+124=252 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_2^2 \mp 4x_2-124=0 \Leftrightarrow x_2^2 \mp 2x_2-62=0$ cu $\Delta=4+4\cdot 62=4\cdot 63 \Rightarrow x_2 \notin \mathbb{Z}.$

Deci ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$

c) Se observă că dacă (x, y, z) este soluție a ecuației, atunci și $(-x, -y, -z)$ este soluție și cum ecuația trebuie să aibă soluție unică $\Rightarrow (x, y, z)=(-x, -y, -z) \Rightarrow x=y=z=0 \Rightarrow k=0.$

Reciproc, pentru $k=0,$ ecuația devine

$$\frac{1}{2}\left[(x-2y)^2+(x-3z)^2+(2y-3z)^2\right]+4y^2\left(y^2-1\right)+9z^2\left(z^6-1\right)=0.$$

Dar $4y^2\left(y^2-1\right)\geq 0,\ \forall y\in\mathbb{Z}$ și $z^2\left(z^6-1\right)\geq 0,\ \forall z\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=2y=3z$ și $y^2\in\{0,1\},z^2\in\{0,1\}.$

$3z$ nr. par $\Rightarrow z$ nr. par $\Rightarrow z=0\Rightarrow x=y=z=0$ și ecuația are soluție unică. Deci $k=0.$

Subiectul 2. Se dă mulțimea

$$A=\left\{\ (a,b)\ \middle|\ a,b\in\mathbb{N},\ a,b>2,\ \frac{a-2}{b+2},\frac{a-1}{b+1},\frac{a}{b},\frac{a+1}{b-1},\frac{a+2}{b-2}\in\mathbb{N}\ \right\}.$$

Arătați că:

a) mulțimea A este nevidă;

b) pentru orice pereche $(a,b)\in A,$ avem $(a+b)\vdots 60;$

c) mulțimea A este infinită.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluție. a) Avem $(57,3)\in A$ deoarece $\frac{55}{5},\frac{56}{4},\frac{57}{3},\frac{58}{2},\frac{59}{1}$ sunt numere naturale. Prin urmare, $A\neq\varnothing.$

b) Deoarece în secvența $\frac{a-2}{b+2},\frac{a-1}{b+1},\frac{a}{b},\frac{a+1}{b-1},\frac{a+2}{b-2}$ sunt numai numere naturale și sunt ordonate strict crescător, deducem că diferența pozitivă dintre oricare doi termeni consecutivi din secvență este număr natural. Avem astfel că

$$\frac{a-1}{b+1}-\frac{a-2}{b+2}=\frac{a+b}{(b+1)(b+2)}\in\mathbb{N}\Rightarrow(a+b)\vdots\left[(b+1)(b+2)\right],$$

deci $(a+b)\vdots(b+1)$ și $(a+b)\vdots(b+2).$

Efectuând și celelalte diferențe între fracții, deducem că $(a+b)\vdots b,$ $(a+b)\vdots(b-1)$ și $(a+b)\vdots(b-2),$ adică $a+b$ este divizibil cu 5 numere naturale consecutive.

Deoarece din 5 numere naturale consecutive, unul este divizibil cu 3, unul cu 4 și unul cu 5, rezultă că $(a+b)\vdots 60.$

c) Pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ avem $(60k-3,3)\in A,$ deoarece

$$\frac{60k-5}{5}\in\mathbb{N},\ \frac{60k-4}{4}\in\mathbb{N},\ \frac{60k-3}{3}\in\mathbb{N},\ \frac{60k-2}{2}\in\mathbb{N},\ \frac{60k-1}{1}\in\mathbb{N},$$

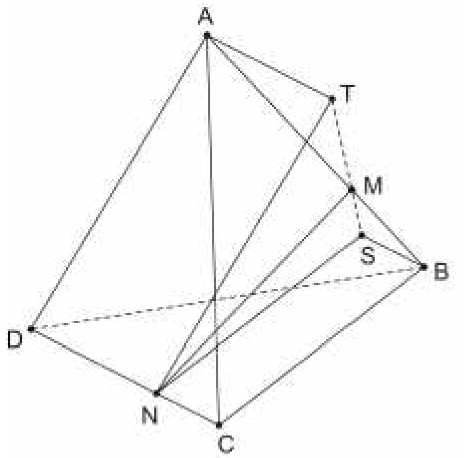
deci mulțimea A este infinită.

Subiectul 3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât: $AD = 6$ cm, $BC = 3$ cm și $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ cu $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ND}{NC} = 2.$

Să se demonstreze că $m\left(\widehat{BC, MN}\right) = m\left(\widehat{AD, MN}\right).$

Iulian Danielescu, profesor, Brăila

Soluție. Construim $NT \parallel AD,\ NT = AD$ și $NS \parallel BC,\ NS = BC.$



Avem $ADNT$, $BCNS$ paralelograme cu $AT \parallel DC \parallel BS$ adică A, T, B, S sunt coplanare.

Din $AT \parallel BS$ și secanta AB avem

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{TAM} \equiv \widehat{SBM} \\ \dfrac{AT}{BS} = \dfrac{DN}{CN} = \dfrac{AM}{MB} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMT \sim \Delta BMS \Rightarrow \frac{TM}{MS} = 2 \text{ și } \widehat{TMA} \equiv \widehat{SMB},$$

deci T, M, S sunt coliniare.

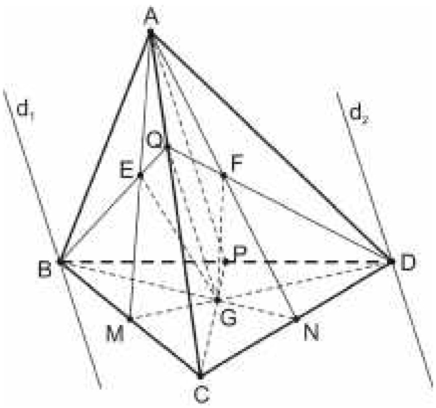
În ΔTNS: $\dfrac{MT}{MS} = \dfrac{NT}{NS} = 2,$ deci, prin reciproca teoremei bisectoarei, avem că $[NM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{TNS}$. În concluzie, $\left(\widehat{BC, MN}\right) \equiv \left(\widehat{AD, MN}\right).$

Subiectul 4. Se consideră tetraedrul $ABCD,$ punctele M, N, E, F mijloacele segmentelor $[BC],[CD],[AM]$ și respectiv $[AN],$ iar G este centrul de greutate al triunghiului $BCD.$

Demonstrați că planele (BEG) și (DFG) intersectează planul (ABD) după două drepte paralele.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluție. Fie P mijlocul lui $[BD]$ și Q intersecția dreptelor BE și $AC.$



Din teorema lui Menelaus aplicată în $\triangle AMC$ cu transversala $B-E-Q,$ obținem $\frac{AQ}{QC}=\frac{1}{2},$ iar din reciproca teoremei lui Menelaus în $\triangle ACN$ avem că D, F, Q sunt coliniare. Prin urmare, $(BEG)\cap(DFG)=QG.$

Din $\frac{AQ}{QC}=\frac{1}{2}=\frac{PG}{GC}$ avem $QG \parallel AP.$

Notăm $(BEG)\cap(ABD)=d_1,$ $(DFG)\cap(ABD)=d_2$ și avem:

$$\left.\begin{array}{c} QG \parallel AP \\ QG \subset (BEG), AP \subset (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \parallel QG,$$

$$\left.\begin{array}{c} QG \parallel AP \\ QG \subset (DFG), AP \subset (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow d_2 \parallel QG,$$

deci $d_1 \parallel d_2.$