Concursul naţional de matematică UNIREA 2016

Ediţia a 15-a

Focşani, Ianuarie 2016

Clasa a 7-a - BAREM

Problema 1. (a) Arătaţi că 2016 nu poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.
(b) Se poate scrie 2016 ca sumă de trei pătrate perfecte?

***

Soluţie:

a) **(1p)** Descompunem in factori primi $2016 = 2^5 \cdot 7 \cdot 9$.
(1p) Presupunem prin reducere la absurd ca $2016 = a^2 + b^2$.
(2p) Un patrat perfect impartit la 7 da unul din resturile 0, 1, 2 sau 4. 7 divide $a^2 + b^2$ doar daca 7 divide a^2 si b^2.
(1p) Rezulta ca 7 divide a si b, prin urmare 49 divide 2016 si avem o contradictie.
b) **(2p)** $2016 = 2^4 \cdot 126 = 2^4(121 + 4 + 1) = 44^2 + 8^2 + 4^2$.

Problema 2. (a) Să se arate că există a, b numere naturale diferite pentru care

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2016}.$$

(b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_1, a_2, ..., a_n$ numere naturale diferite două câte două pentru care

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2016}.$$

Gazeta Matematică

Soluţie:

(a) $a = 2018, b = 1008 \cdot 2018$ **(2p)**

(b) $n=1 \Rightarrow a_1 = 2016$ **(1p)**
$n=2$ vezi (a) $n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} = 1$ **(2p)**
Finalizare **(2p)**

Problema 3. În triunghiul ABC avem $AD \perp BC$, $D \in BC$ şi E mijlocul lui $[BC]$. Dacă $AB = 2 \cdot DE$, arătaţi că $m(\widehat{B}) = 2 \cdot m(\widehat{C})$.

***

Soluţie:

(1p) Consideram F mijlocul laturii AB.
(2p) In triunghiul dreptunghic ABD, FD este mediana deci jumatate din ipotenuza. Avem $FD = \frac{1}{2}AB = DE$.
(2p) $\widehat{FDB}$ este unghi exterior triunghiului isoscel DFE si obtinem $m(\widehat{FDB}) = 2 \cdot (\widehat{FED})$.
(1p) Observam ca EF este linie mijlocie, deci $m(\widehat{FED}) = m(\widehat{C})$
(1p) Din triunghiul isoscel FBD, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{FDB}) = 2 \cdot m(\widehat{FED}) = 2 \cdot m(\widehat{C})$.

Problema 4. Fie ABC un triunghi echilateral de latură 1 şi segmentele $MQ || AB, RN || BC$ şi $TP || CA$ unde $M, N \in (AC), P, Q \in (BC)$ şi $R, T \in (AB)$ astfel înât MQ, RN şi TP sunt concurente.

(a) Demonstraţi că $AM + BR + CP = 1$.
(b) Demonstraţi că triunghiul determinat de mijloacele segmentelor MQ, RN şi TP este echilateral.

Enache Pătraşcu şi M. Asiminoaie

Soluţie:

(a) Se formează paralelograme ale căror laturi sunt AM, BR, CP şi se transpun pe una dintre laturile triunghiului **(3p)**.
(b) Se consideră G centrul triunghiului. Atunci mijloacele segmentelor MQ, RN şi TP (X, Y, Z) sunt proiecţiile lui G pe acestea. **(1p)**
Fie K punctul de concurenţă al dreptelor MQ, RN şi TP şi O mijlocul lui GK. Atunci $OX = OY = OZ = \frac{GK}{2}$, ca mediane în triunghiurile dreptunghice GXK, GYK, GXK**(2p)**.
Dar $\angle XOY = \angle YOZ = 120^0$, de unde $\Delta XOY \equiv \Delta YOZ \equiv \Delta ZOX$ de unde concluzia. **(1p)**