Concursul naţional de matematică UNIREA 2016

Ediţia a 15-a

Focşani, Ianuarie 2016

Clasa a 6-a - BAREM

Problema 1. Să se determine numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$ scrise în baza 10 dacă dau câtul $\overline{ac}$ şi restul b la împărţirea cu 9.

Arthur Bălăucă

Soluţie:

$\overline{abc} = 9\overline{ac} + b \Rightarrow 10a + 9b = 8c$, deci b este par **(2p)**
$b = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 405$ **(1p)**
$b = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 326$ **(1p)**
$b = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 247$ **(1p)**
$b = 6 \Rightarrow \overline{abc} = 168$ **(1p)**
$b = 8$ nu avem soluţii. **(1p)**

Problema 2. O persoana are 10 bancnote de 3 UM şi 10 bancnote de 5 UM (unităţi monetare). Câte sume pot fi plătite exact cu aceste bancnote ?

Gazeta Matematică

Soluţie:

Fie x suma pe care dorim să o plătim. Dacă $x \in \{1, 2, ..., 40\}$ se poate scrie $x = 3a+5b$ atunci $80 - x = 3(10 - a) + 5(10 - b)$ se poate scrie. Clar, 80 lei se pot plăti **(2p)**

Nu se pot plăti sumele $1, 2, 4, 7$ şi simetric $73, 76, 78, 79$ **(2p)**

Pentru $x \leq 40$, x poate avea formele $5c$, $5c+1 = 5(c-1)+2\cdot 3$, $5c+2 = 5(c-2)+3\cdot 4$, $5c + 3$ sau $5(c - 1) + 3 \cdot 3$. **(3p)**

Problema 3. Se consideră pe o dreaptă punctele $A_0, A_1, A_2, ..., A_{2016}$ în ordine astfel încât $A_0A_1 = 1, A_1A_2 = 2, ..., A_{k-1}A_k = k, ..., A_{2015}A_{2016} = 2016$.

(a) În ce segment A_pA_{p+1} se află mijlocul segmentului A_0A_{2016} ?
(b) Determinaţi dacă există două segmente $[A_pA_{p+1}], [A_kA_{k+1}], p < k \leq 2015$ cu mijloacele M respectiv P astfel încât $A_0M = PA_{2016}$.

Enache Pătraşcu şi Cornel Noană

Soluţie:

(a) Fie K mijlocul lui A_0A_{2016}. $A_0A_{2016} = 1 + 2 + 3 + ... + 2016 = \frac{2016 \cdot 2017}{2}$, deci $A_0K = \frac{2016 \cdot 2017}{4}$. **(1p)**
Căutăm k maxim astfel încât $1 + 2 + 3 + ... + k \leq \frac{2016 \cdot 2017}{4}, k = 1425$. **(2p)**
(b) Căutăm k, p astfel încât $1+2+...+k+\frac{k+1}{2}+1+2+...+p+\frac{p+1}{2} = A_0A_{2016}$, adică $(k+1)^2+(p+1)^2 = 2016 \cdot 2017$. Deci $7|(k+1)^2+(p+1)^2$, de unde $7|(k+1)^2, 7|(p+1)^2$ deci $49|(k + 1)^2 + (p + 1)^2 = 2016 \cdot 2017$, fals. **(4p)**

Problema 4. Se dau $n \geq 3$ unghiuri cu acelaşi vârf, dintre care unul are 120^0, cu proprietatea că oricare două unghiuri dintre acestea au o latură comună şi dintre toate unghiurile formate din bisectoarele lor, cel mai mic are 30^0 şi cel mai mare are 60^0. Determinaţi unghiurile.

Cristi Săvescu

Soluţie:

Fie $\angle AOB$ unghiul de 120^0. Dacă există un unghi care este aflat în exteriorul lui $\angle AOB$, să spunem $\angle COA$, atunci bisectoarea acestuia va forma cu bisectoarea lui AOB un unghi de $\frac{120^0+m(\angle COA)}{2} > 60^0$, fals. Deci toate unghiurile sunt în interiorul lui $\angle AOB$. (*) **(2p)**

Din ipoteză deducem că există două unghiuri în interiorul lui $\angle AOB$ ale căror bisectoare formează un unghi de 60^0.

Cazul 1. Laturile comune acestor unghiuri cu $\angle AOB$ coincid - să spunem că acestea ar fi OA. Atunci unghiurile sunt $\angle AOD$ şi $\angle AOE$ cu $m(\angle AOD) > m(\angle AOE)$, deci bisectoarele lor formează $60^0 = \frac{m(\angle AOD)-m(\angle AOE)}{2}$, de unde rezultă că $m(\angle AOD) - m(\angle AOE) = 120^0$, deci $m(\angle AOD) > 120^0$, contradicţie cu (*). **(1p)**

Cazul 2. Laturile comune acestor unghiuri cu $\angle AOB$ sunt AO respectiv BO. Fie unghiurile notate cu AOD şi EOB.
Cazul 2.1. Dacă $m(\angle DOB) > m(\angle EOB)$ atunci bisectoarele lor formează $60^0 = \frac{m(\angle AOD)+m(\angle EOB)}{2} + m(\angle DOE) = \frac{120^0-m(\angle DOE)}{2} + m(\angle DOE) = 60^0 + \frac{m(\angle(DOE))}{2}$, contradicţie.
Cazul 2.2. Dacă $m(\angle DOB) < m(\angle EOB)$ atunci bisectoarele lor formează $60^0 = \frac{m(\angle AOD)+m(\angle EOB)}{2} - m(\angle DOE) = \frac{120^0+m(\angle DOE)}{2} - m(\angle DOE) = 60^0 - \frac{m(\angle(DOE))}{2}$,

contradicţie.

Deci $m(\angle DOB) = m(\angle EOB)$, deci unghiurile ale căror bisectoare formează un unghi de 60^0 sunt $\angle AOD$ şi $\angle DOB$. **(2p)**

Dacă $m(\angle AOD) \neq m(\angle DOB)$, atunci bisectoarea unghiului mai mare dintre ele va forma împreună cu bisectoarea lui $\angle AOB$ un unghi mai mic de 30^0, contradicţie, deci $m(\angle AOD) = m(\angle DOB) = 60^0$. **(1p)**

Dacă ar mai exista un unghi înafara celor trei, distinct de acestea, atunci acesta ar trebui să aibă o latură diferită de cele existente şi câte o latură comună cu fiecare unghi existent, ceea ce implică faptul că cele trei unghiuri existente au o latură comună, fals. Deci unghiurile sunt $\angle AOB = 120^0, \angle AOD = \angle DOB = 60^0$. **(1p)**