Concursul naţional de matematică UNIREA 2016

Ediţia a 15-a

Focşani, Ianuarie 2016

Clasa a 10-a - BAREM

Problema 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$x \cdot 3^{x^2-3} - 3^{x+1} + x^2 \cdot 3^x = x^2 + x - 3.$$

Gazeta Matematică

Soluţie:

Fie $a = x^2 - 3$. Atunci $x(3^a - 1) + a(3^x - 1) = 0$. **(1p)**
Se observă că $a = 0$ sau $x = 0$ **(2p)**
Dacă $a \neq 0, x \neq 0$ atunci $\frac{x}{3^x-1} = -\frac{a}{3^a-1}$ care nu are soluţii **(3p)**
Finalizare, $a = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$, deci soluţiile sunt $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ **(1p)**

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x^2 + yf(y)) = xf(x) + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cristi Săvescu

Soluţie:

Pentru $x = 0$ avem $f(yf(y)) = y^2, \forall y \in \mathbb{R}$ (1), în particular $f(0) = 0$. **(1p)**
Pentru $y = 0$ avem $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2).
Atunci $f(f(x^2)) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(f(x)) = x, \forall x \geq 0$ (3). **(1p)**
Din (2) rezultă că $xf(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = -xf(-x) \Rightarrow^{f(0)=0} f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci, conform (3), pentru orice $x < 0$ avem $f(f(-x)) = -x \Rightarrow f(-f(x)) = -x \Rightarrow f(f(x)) = x$. Deci $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este injectivă. **(2p)**
Înlocuind în relaţia din ipoteză x cu $f(x)$ avem $f(f^2(x)+yf(y)) = f(x)f(f(x))+y^2 = xf(x) + y^2 = f(x^2 + yf(y)) \Rightarrow f^2(x) = x^2$, deci $f(x) \in \{x, -x\}, \forall x \in \mathbb{R}$. **(1p)**

Dacă există $x, y \in \mathbb{R}^*$ cu $f(x) = x$ şi $f(y) = -y$, atunci $f(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$ deci $x^2 - y^2 = x^2 + y^2$ sau $y^2 - x^2 = x^2 + y^2$, deci $x = 0$ sau $y = 0$ - contradicţie.
Deci $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ sau $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Observăm că ambele funcţii verifică.**(2p)**

Problema 3. (a) Dacă $a, b, c > 1$ şi $a \geq b$, arătaţi că

$$log_a c \leq lob_b c.$$

(b) Dacă $x, y, z \geq 2$, arătaţi că

$$log_{x+y} z + log_{y+z} x + log_{z+x} y \geq \frac{3}{2}.$$

***

(a) $log_a c \leq log_b c$ **(1p)** $\Rightarrow log_c a \leq log_b c$**(1p)**
(b) $x, y \geq 2 \Rightarrow (x-2)(y-2) \geq 0 \Rightarrow xy \geq 2(x+y) - 4 \geq x + y$ **(1p)**
Atunci $log_{x+y} z \geq log_{xy} z$ şi analoagele deci $\sum log_{x+y} z \geq log_{xy} z$**(2p)**. Finalizare **(2p)**.

Problema 4. Se consideră un pentagon convex ce are toate unghiurile egale cu proprietatea că lungimile laturilor acestuia pot fi aranjate astfel încât să fie în progresie aritmetică. Demonstraţi că pentagonul este regulat.

Cristi Săvescu

Soluţie:

Presupunem că progresia formată de laturile pentagonului are raţia $r \neq 0$. Aşezăm pentagonul astfel încât dacă notăm cu a, b, c, d, e afixele vârfurilor acestuia, atunci $e = 0$ iar $a = l$, unde l este lungimea celei mai mici laturi a acestuia - adică îl "culcăm" pe cea mai mică latură a sa pe $(Ox$. **(1p)**

Fie $\epsilon = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}$. Atunci $b = a + \epsilon(l + xr), c = b + \epsilon^2(l + yr), d = c + \epsilon^3(l + zr), e = d + \epsilon^4(l + wr)$, unde $\{x, y, z, w\} = \{1, 2, 3, 4\}$ **(3p)**, deci

$$0 = l + \epsilon(l + xr) + \epsilon^2(l + yr) + \epsilon^3(l + zr) + \epsilon^4(l + wr) = l(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4) + r(x\epsilon + y\epsilon^2 + z\epsilon^3 + w\epsilon^4).\textbf{(1p)}$$

Dar $1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4 = \frac{\epsilon^5 - 1}{\epsilon - 1} = 0$, deci $x\epsilon + y\epsilon^2 + z\epsilon^3 + w\epsilon^4 = 0 \Rightarrow |x + y\epsilon| = |z + w\epsilon|$.

Asta conduce la $(x + ycos\frac{2\pi}{5})^2 + (ysin\frac{2\pi}{5})^2 = (z + wcos\frac{2\pi}{5})^2 + (wsin\frac{2\pi}{5})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xycos\frac{2\pi}{5} = z^2 + w^2 + 2zwcos\frac{2\pi}{5}$ iar cum $cos\frac{2\pi}{5} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, rezultă că $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$ şi $2xy = 2zw$, deci $x + y = z + w$ şi $|x - y| = |z - w|$, deci $\{x, y\} = \{z, w\}$, contradicţie.
Aşadar $r = 0$, deci pentagonul este regulat. **(2p)**