Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2015

Ediţia a 14-a

Focşani, Ianuarie 2015

Clasa a 10-a

Problema 1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$.
Arătaţi că: $|z_1^{2016} + z_2^{2016} + z_3^{2016}| = 3$.

Problema 2. Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}^*, n \geq 1$ numere care au acelaşi modul. Arătaţi că:

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}| \leq n^2.$$

Problema 3.

(a) Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Câte soluţii are în $\mathbb{N}^*$ inecuaţia: $x^m \leq 2015$? Dar $m^x \leq 2015$?

(b) Demonstraţi că pentru orice $n \geq 2$ are loc identitatea:

$$\sum_{k=2}^{n} [\sqrt[k]{n}] = \sum_{k=2}^{n} [log_k n].$$

(*Am notat cu* $[a]$ *partea întreagă a numărului real* a.)

Problema 4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Arătaţi că f este impară.

(b) Determinaţi funcţia f ştiind că mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = x\}$ este finită.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte