Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2015

Ediţia a 14-a

Focşani, Ianuarie 2015

Clasa a 6-a

Problema 1. Aflaţi toate perechile de numere naturale m, n care satisfac ecuaţia

$$\frac{3n}{m} = \frac{4n-1}{m+1}.$$

***

Soluţie

$\frac{3n}{m} = \frac{4n-1}{m+1} \Leftrightarrow mn = 3n+m$ .... **2 puncte**

$m = \frac{3n}{n-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 3 + \frac{3}{n-1} \in \mathbb{N}$, deci $n \in \{2, 4\}$ .... **3 puncte**

$n = 2 \Rightarrow m = 6, n = 4 \Rightarrow m = 4$ .... **2 puncte**

Problema 2. Pe o tabla sunt scrise la început numerele 11 şi 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja.

(a) Arătaţi că indiferent câţi paşi s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86.

(b) Este posibil ca, după mai mulţi paşi, pe tablă să fie scris numărul 2015 ?

***

Soluţie

Orice număr scris pe tablă este de forma $11x + 13y$ .... **2 puncte**

(a) $11a+13b = 86$ nu are soluţii, deci 86 nu va putea fi scris pe tablă .... **2 puncte**

(b) Se scrie 24 şi apoi adaug 181 de 11 şi ajung la 2015 .... **3 puncte**

Problema 3. Pe o dreaptă d, se iau punctele distincte A şi B. Tot pe d, dar, în afara segmentului $[AB]$, se consideră 2015 puncte distincte. Arătaţi că suma distanţelor de la A la cele 2015 puncte este diferită de suma distanţelor de la B la cele 2015 puncte.

Dan Popoiu

Soluţie

Fie $M_1, M_2, ..., M_k$ punctele aflate în stânga lui A şi $M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_{2015}$ punctele aflate în dreapta lui B .... **1 punct**

Atunci $AM_1 + ... + AM_{2015} = AM_1 + ...AM_k + (AB + BM_{k+1}) + ...(AB + BM_{2015}) =$
$= AM_1 + ... + AM_k + BM_{k+1} + ... + BM_{2015} + (2015 - k)AB$ .... **2 puncte**
$BM_1 + ... + BM_{2015} = AM_1 + ... + AM_k + BM_{k+1} + ... + BM_{2015} + kAB$ .... **2 puncte**
Cum 2015 este impar, $kAB \neq (2015-k)AB$, finalizare .... **2 puncte**

Problema 4. În jurul unui punct O se consideră numărul maxim de unghiuri $\angle A_{k-1}OA_k, k = \overline{1, ..., n}$ cu proprietatea că $m(\angle A_{k-1}OA_k) = k^\circ$, pentru orice $k = \overline{1, ..., n}$.
(a) Determinaţi $m(\angle A_0OA_n)$.

(b) Aflaţi dacă există două unghiuri printre unghiurile $\angle A_kOA_{k+1}, k = \overline{1, ..., n-1}$ ale căror bisectoare să fie perpendiculare.

Cornel Noană

Soluţie

(a) $1^\circ + 2^\circ + ... + (n)^\circ = \frac{n(n+1)}{2} \leq 360^\circ$ .... **1 punct**
$n(n+1) \leq 720 \Rightarrow n \leq 26$, deci $n_{max} = 26$ .... **2 puncte**
$m(\angle A_0OA_n) = 360^\circ - \frac{n_{max}(n_{max}+1)}{2} = 9^\circ$ .... **1 punct**

(b) $\frac{m}{2} + (m + 1) + (m + 2) + ... + (m + n - 1) + \frac{m+n}{2} = 90^\circ \Rightarrow n(2m + n) = 180$ .... **2 puncte**
Un exemplu .... **1 punct**