Concursul interjudeţean de Matematică „UNIREA“, Focşani, 30 ianuarie 2015

Clasa a V-a

Subiectul I

Fie a, b, c, d patru numere naturale astfel încât $a = b \cdot c + d$.

Demonstrați că restul împărțirii lui a lui b este egal cu restul împărțirii lui d la b.

Justificați!

(G.M. 11/2014, Ion Voicu)

Barem de corectură și de evaluare

Din oficiu **(1p)**

Conform teoremei împărțirii cu rest avem relațiile:

$a = bm + r_1$, unde $0 \le r_1 < b$ și $d = bn + r_2$, unde $0 \le r_2 < b$. **(1p)**

Înlocuind în relația dată $a = bc + d$ se obține: $bm + r_1 = bc + bn + r_2$, de unde

$b(m - c - n) = r_2 - r_1$ **(1)** sau $r_1 - r_2 = b(c + n - m)$, **(2)**. **(2p)**

Presupunem că $r_1 \ne r_2$.

Dacă $r_2 > r_1$, din **(1)** rezultă $b / r_2 - r_1$. Însă $r_1 < b$ și $r_2 < b$ implică $r_2 - r_1 < b$, absurd. **(1p)**

Dacă $r_1 > r_2$, din **(2)** rezultă $b / r_1 - r_2$. Însă $r_1 - r_2 < b$, absurd. **(1p)**

Prin urmare, $r_1 = r_2$. **(1p)**

Subiectul II

La Olimpiada de la Atlanta (S.U.A.) proba de atletism pe distanța de 100 m a necesitat 31 de curse: 30 în calificări și finala. Se știe că la fiecare cursă au participat 8 atleți, dintre care primii patru s-au calificat în faza următoare.

Aflați numărul sportivilor care au participat la această probă. Justificați!

Barem de corectură și de evaluare

Din oficiu **(1p)**

Putem realiza următorul tabel:

	Finala	**Semifinala**	**Sferturi**	**Optimi**	**Calificări**	**Total**
Numărul de curse	1	2	4	8	16	31
Participanți	8	16	32	64	128	128
	1p	1p	1p	1p	1p	

Au participat la proba de 100 m – 128 de sportivi. **(1p)**

Subiectul III

Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că suma cifrelor lui 5^n este 8. Justificați!

(Cătălin Budeanu)

Barem de corectură și de evaluare

Din oficiu **(1p)**

Pentru $n \geq 2$ ultimele două cifre ale numărului 5^n sunt 2 și 5 în această ordine. **(1p)**

Remarcăm faptul că $5^3 = 125$ este soluție a problemei. **(1p)**

Presupunem că ar exista un număr natural $n > 3$ care să fie soluție a problemei, atunci 5^n ar trebui să fie de forma $1\underbrace{00...0}_{k \text{ cifre}}25$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**

Cum $1\underbrace{00...0}_{k \text{ cifre}}25 = 25 \cdot 4\underbrace{00...0}_{k-1 \text{ cifre}}1 = 5^n$, fals deoarece $5 \nmid 4\underbrace{00...0}_{k-1 \text{ cifre}}1$. **(2p)**

Prin urmare, $n = 3$ este singura soluție a problemei. **(1p)**

Subiectul IV

Ionuț și Vasilică locuiesc în vile situate de aceeași parte a unei străzi din Focșani, iar toate vilele situate de acea parte a străzii sunt numerotate cu numere naturale pare. Se știe că vila lui Ionuț este numerotată cu numărul natural n, iar vila lui Vasilică cu numărul natural $8n$. Între vilele lui Vasilică și Ionuț există exact 69 de vile, iar vila Lenuței este situată astfel încât numărul de vile situate de la ea până la vila lui Vasilică este egal cu triplul numărului de vile situate de la ea până la vila lui Ionuț.

Aflați:

a) numărul natural n;

b) la ce număr locuiește Vasilică și Lenuța?

c) suma numerelor scrise pe cele 69 de plăcuțe situate pe porțile vilelor situate între vilele lui Ionuț și Vasilică? Justificați!

(Artur Bălăucă)

Barem de corectură și de evaluare

Din oficiu **(1p)**

a) Fie $n = 2p, p \in \mathbb{N}^*$.

Avem $2p < 2p + 2 < 2p + 4 < \ldots < 2p + 138 < 16p$. **(1p)**

Deci $2p + 138 + 2 = 16p$, de unde $p = 10$ și $n = 20$. **(1p)**

b) Vasilică locuiește la numărul $20 \cdot 8 = 160$. **(1p)**

De la vila Lenuței până la vila lui Ionuț sunt $(69 - 1) : 4 = 17$ vile, acestea sunt numerotate cu numerele: $20 + 2 \cdot 1, 20 + 2 \cdot 2, ..., 20 + 2 \cdot 17$, adică cu numerele 22, 24, 26, ..., 54.

Deci vila Lenuței are numărul 56. **(1p)**

c) $(20 + 2 \cdot 1) + (20 + 2 \cdot 2) + ... + (20 + 2 \cdot 68) + (20 + 2 \cdot 69) = \underbrace{(20+20+20+..+20)}_{69 \text{ termeni}} +$

$+ 2(1 + 2 + ... + 69) = 69 \cdot 20 + 2(69 \cdot 70) : 2 = 69 \cdot 20 + 69 \cdot 70 = 69(20 + 70) = 69 \cdot 90 =$
$= 6210$. **(2p)**