Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2015

Ediţia a 14-a

Focşani, Ianuarie 2015

Clasa a 10-a

Problema 1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$.
Arătaţi că: $|z_1^{2016} + z_2^{2016} + z_3^{2016}| = 3$.

Lucian Lazăr

Soluţie

Fie $\frac{z_1}{z_2} = \cos\theta + i\sin\theta$ şi $\frac{z_2}{z_3} = \cos\phi + i\sin\phi$. Atunci $\frac{z_3}{z_1} = cos(-\theta-\phi) + isin(-\theta-\phi)$
.... **2 puncte**
Pentru că suma acestor numere este 1 obţinem $0 = \sin\theta + \sin\phi - \sin(\theta+\phi) = 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} - 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta+\phi}{2} = 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}(\cos\frac{\theta-\phi}{2} - \cos\frac{\theta+\phi}{2}) = 4\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}$.
.... **2 puncte**
De aici rezultă că $\theta = 2k\pi$ sau $\phi = 2k\pi$ sau $\theta + \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, deci $z_1 = z_2$ sau $z_2 = z_3$ sau $z_3 = z_1$ .... **1 punct**
Dacă $z_1 = z_2$, atunci $\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 0$ sau $(\frac{z_1}{z_3})^2 = -1$. Atunci $\frac{z_1}{z_3} = \pm i$, deci $|z_1^{2016} + z_2^{2016} + z_3^{2016}| = |z_1|^{2016}|2 + (\pm i)^{2016}| = 3$ .... **2 puncte**

Problema 2. Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}^*, n \geq 1$ numere care au acelaşi modul. Arătaţi că:

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}| \leq n^2.$$

Cristi Săvescu

Soluţie 1

$|\sum z_i \sum \frac{1}{z_i}| = |\sum z_i||\sum \frac{1}{z_i}| \leq \sum |z_i| \sum \frac{1}{|z_i|} = n^2$ .... **7 puncte**

Soluţie 2

Scriem $z_k = m(cosa_k + isina_k)$, unde m este modulul comun al numerelor date şi $a_k \in [0, 2\pi), k = 1, 2, ..., n$ .... **1 punct**

Observăm că $\frac{m}{z_k} = \frac{1}{cosa_k+isina_k} = \frac{cos(0)+isin(0)}{cosa_k+isina_k} = cos(-a_k)+isin(-a_k) = cosa_k - isina_k$, $\forall k = 1, 2, ..., n$ .... **1 punct**

Atunci $A = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} = m \sum\limits_{k=1}^{n}(cosa_k + isina_k) \cdot \frac{1}{m} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k(cosa_k - isina_k)$, adică $A = (\sum\limits_{k=1}^{n} cosa_k)^2 + (\sum\limits_{k=1}^{n} sina_k)^2$. Deci putem afirma că A este un număr real pozitiv şi $|A| = A$ .... **2 puncte**

Mai departe $A = (\sum\limits_{k=1}^{n} cosa_k)^2 + (\sum\limits_{k=1}^{n} sina_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} cosa_k^2 + 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le n} cosa_i cosa_j + \sum\limits_{k=1}^{n} sina_k^2 + 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le n} sina_i sina_j$ $A = n + 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le n} cos(a_i - a_j) \le n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$ .... **3 puncte**

Problema 3.

(a) Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Câte soluţii are în $\mathbb{N}^*$ inecuaţia: $x^m \le 2015$? Dar $m^x \le 2015$?

(b) Demonstraţi că pentru orice $n \ge 2$ are loc identitatea

$$\sum_{k=2}^{n} [\sqrt[k]{n}] = \sum_{k=2}^{n} [log_k n].$$

Cristi Săvescu

Soluţie

(a) Dacă $x^m \le 2015$, atunci $x \le \sqrt[m]{2015}$, deci $x \le [\sqrt[m]{2015}]$. Atunci numărul soluţiilor acestei inecuaţii este $[\sqrt[m]{2015}]$ .... **1 punct**
Analog, pentru cea de-a doua inecuaţie, numărul soluţiilor este $[\log_m 2015]$ .. **1 punct**
(b) Fie mulţimea $S_n = \{(a, b) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} : a^b \le n\}$ .... **2 puncte**
Numărăm în două moduri cardinalul aceasteia:
(1) Fixăm $\alpha \in \{2, 3, ..., n\}$. Ecuaţia $\alpha^x \le n$ are $[log_\alpha n]$ soluţii în $\{1, 2, ..., n\}$, deci S are $n + \sum_{k=2}^{n} [log_k n]$ soluţii.
(2) Fixăm $\beta \in \{2, 3, ..., n\}$. Ecuaţia $x^\beta \le n$ are $[\sqrt[\beta]{n}]$ soluţii în $\{1, 2, ..., n\}$, deci S are $n + \sum_{k=2}^{n} [\sqrt[k]{n}]$ soluţii .... **3 puncte**

Problema 4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Arătaţi că f este impară.

(b) Determinaţi funcţia f ştiind că mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = x\}$ este finită.

Cristi Săvescu

Soluţie

(a) Pentru $x = 0$ obţinem $f(0) = yf(0)$ pentru orice y, deci $f(0) = 0$ .... **1 punct**
Dacă $f(1) = 0$, atunci pentru $y = 1$ avem $f(0) = f(x)$, pentru orice x, deci $f \equiv 0$ care este impară. Dacă $f(1) \neq 0$, atunci $f(x) = f(y)$ implică $f(f(x)) = f(f(y)) = xf(1) = yf(1)$, deci $x = y$, deci f este injectivă. .... **1 punct**

Atunci $f(xf(1)) = f(x)$ implică $x = xf(1)$ pentru orice x, deci $f(1) = 1$.
Mai departe, $f(f(y)) = yf(1) = y$ pentru orice y. Atunci $f(f(x)f(y)) = yf(f(x)) = xy$, deci $f(xy) = f(f(f(x)f(y))) = f(x)f(y)$. Deci $f(-1)^2 = f(1) = 1$, iar cum $f(1) = 1$ şi f este injectivă, atunci $f(-1) = -1$, iar $f(-x) = f(-1)f(x) = -f(x)$ pentru orice x .... **1 punct**

(b) Dacă $f \equiv 0$, este clar că mulţimea punctelor fixe este $\{0\}$, deci finită.

Dacă însă $f \neq 0$, conform celor arătate mai sus, avem $f(xy) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x\}$. Atunci $\{-1, 0, 1\} \subset A$ .... **1 punct**

Mai mult, dacă $x \in A$, atunci $f(x^2) = f^2(x) = x^2$ şi inductiv $f(x^n) = x^n$, pentru orice $n \geq 1$, deci $x \in A$ implică $x^n \in A$, iar cum A este finită rezultă că $A \subset \{-1, 0, 1\}$. Întradevăr, dacă $x \in A$ are modul diferit de 0 sau 1, atunci mulţimea $\{x, x^2, x^3, ...\}$ este infinită şi inclusă în A, deci A ar fi infinită, contradicţie. Deci $A = \{-1, 0, 1\}$ .... **1 punct**

În relaţia din ipoteză, pentru $x = y$ avem $f(xf(x)) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Deci $xf(x)$ este punct fix pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $xf(x) \in \{-1, 0, 1\}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ ... **1 punct**

Pentru $x = 0$, avem $f(x) = 0$ iar pentru $x \neq 0$ avem $f(x) \neq 0$ (din injectivitate), deci $xf(x) \in \{-1, 1\}$. Dacă $x > 0$, atunci $xf(x) = xf(\sqrt{x}^2) = xf^2(\sqrt{x}) \geq 0$, deci $xf(x) = 1$, adică $f(x) = \frac{1}{x}$. Pentru $x < 0$, avem $-x > 0$, deci $f(-x) = \frac{1}{-x}$. Atunci, din (a) avem $f(-x) = -f(x) = -\frac{1}{x}$, deci $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$ .... **1 punct**