Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2015

Ediţia a 14-a

Focşani, Ianuarie 2015

Clasa a 9-a

Problema 1. Se consideră o mulţime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietăţile:

(i) $1 \in G$;
(ii) dacă $x \in G$ atunci $\sqrt{x+2} \in G$;
(iii) dacă $\sqrt{x+3} \in G$ atunci $x+4 \in G$.

Arătaţi că $\sqrt{2015} \in G$.

Lucian Dragomir

Soluţie
$1 \in G \Rightarrow \sqrt{3} \in G \Rightarrow 4 \in G \Rightarrow \sqrt{6} \in G \Rightarrow 7 \in G \Rightarrow 3 = \sqrt{9} \in G$ .... **3 puncte**

Fie $P(n) : 3n \in G, n \in \mathbb{N}^*$. $P(1)$ este deci adevărată. Arătăm că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ .... **2 puncte**

Dacă $3n \in G$, atunci $\sqrt{3n+2} \in G$ deci $3n+3 \in G$, adică $P(n+1)$. Deci $2013 \in G$, deci $\sqrt{2015} \in G$ .... **3 puncte**

Problema 2. (a) Fie x, y numere reale, $x > y$. Arătaţi că

$$x^3 + x^2(y-4) - x(y^2-4) \geq y^3 - 4y^2 + 4y.$$

(b) Arătaţi că partea întreagă a numărului $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{128}$ este 5.

Enache Pătraşcu

Soluţie
(a) $x^3 + x^2(y-4) - x(y^2-4) \geq y^3 - 4y^2 + 4y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2)^2 \geq 0,\ x \geq y$
.... **3 puncte**

(b) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + (\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}) + ... + (\frac{1}{126} + \frac{1}{127} + \frac{1}{128}) < <$
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{42}) = 1+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+...+(\frac{1}{39}+\frac{1}{40}+\frac{1}{41})+\frac{1}{42} <$
$< 1+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11})+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{12} < 1+\frac{4}{2}+\frac{4}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{12} < 6$
.... **2 puncte**

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + (\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}) + ... + (\frac{1}{124} + \frac{1}{125} + \frac{1}{126}) + \frac{1}{127} + \frac{1}{128} >$
$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+(\frac{1}{3}+...+\frac{1}{42}) = 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})+...+(\frac{1}{40}+\frac{1}{41}+\frac{1}{42}) >$
$> 1+\frac{1}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12})+\frac{1}{13}+\frac{1}{14} > 1+\frac{1}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{7} >$
$> 4+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7} = 4+\frac{115}{105} > 5$ .... **2 puncte**

Problema 3. (a) Dacă $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \geq 2015, a \neq 0$ arătaţi că $a < 0$.

(b) Fie $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ şi $(c_n)_{n\geq 0}$ progresii aritmetice cu termenii pozitivi şi ecuaţiile

$$E_n : a_n x^2 - 2b_n x + c_n = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $M = \{n \in \mathbb{N} : E_n \text{ are soluţii reale}\}$ are 2015 elemente, arătaţi că $2015 \notin M$.

Cristi Săvescu

Soluţie
(a) $0 > ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{-\Delta}{4a^2})]$ .... **1 punct**
Pentru x suficient de mare $(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{-\Delta}{4a^2}) > 0$, de unde $a < 0$ .... **2 punct**

(b) Fie $\Delta_n = 4b_n^2 - 4a_nc_n$ discriminantul ecuaţiei E_n. Notând $a_n = a_0 + nr_1$ şi analoagele, obţinem $\Delta_n = 4(b_0^2 + n^2r_2^2 + 2nb_0r_2 - a_0c_o - a_0nr_3 - c_0nr_1 - n^2r_1r_3)$, adică $\Delta_n = 4[n^2(r_2^2 - r_1r_3) + n(2b_0r_2 - a_0r_3 - c_0r_1) + (b_0^2 - a_0c_0)]$ .... **1 punct**

Întrucât ecuaţiile E_n nu mai au soluţii reale de la un n încolo (să zicem n_0), $\Delta_n < 0$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci coeficientul lui n^2 trebuie să fie negativ: $r_2^2 < r_1r_3$.

Atunci cele 2015 valori ale lui $n \in M$ sunt valorile lui n pentru care $\Delta_n \geq 0$, iar cum coeficientul lui n^2 în $4[n^2(r_2^2 - r_1r_3) + n(2b_0r_2 - a_0r_3 - c_0r_1) + (b_0^2 - a_0c_0)]$ este negativ, atunci numerele $n \in M$ sunt numere consecutive cuprinse între soluţiile $n_1 < n_2$ ale ecuaţiei $4[n^2(r_2^2 - r_1r_3) + n(2b_0r_2 - a_0r_3 - c_0r_1) + (b_0^2 - a_0c_0)] = 0$ .... **1 punct**

De aici rezultă că $n_2 \geq 0$, altfel toate soluţiile acesteia ar fi negative.

Obervăm că raţiile progresiilor sunt numere pozitive, alftel, dacă de exemplu $r_1 < 0$ atunci $a_{[\frac{a_0+1}{-r_1}]} = a_0 + r_1[\frac{a_0+1}{-r_1}] \leq a_0 + r_1(\frac{a_0+1}{-r_1}) < 0$, ceea ce contrazice faptul că toţi termenii progresiilor sunt pozitivi.

Presupunând că $b_0^2 < a_0c_0$, ne-ar rezulta că $n_1n_2 = \frac{b_0^2 - a_0c_0}{r_2^2 - r_1r_3} > 0$ şi $n_1 + n_2 =$

$-\frac{2b_0r_2-a_0r_3-c_0r_1}{r_2^2-r_1r_3}$. Dar $a_0r_3+c_0r_1 \geq 2\sqrt{a_0c_0r_1r_3} > 2\sqrt{b_0^2r_2^2} = 2b_0r_2$, deci $n_1+n_2 = -\frac{2b_0r_2-a_0r_3-c_0r_1}{r_2^2-r_1r_3} < 0$. De aici ar rezulta că $n_1 < n_2 \leq 0$, deci M ar avea maxim un element, contradicţie. .... **1 punct**

Atunci $b_0^2 \geq a_0c_0$, adică $\Delta_0 \geq 0$, deci $0 \in M$. Cum numerele M are elementele numere consecutive, dacă $2015 \in M$, atunci am avea $\{0,1,2,...,2015\} \subset M$, deci $|M| \geq 2016$, contradicţie .... **1 punct**

Problema 4. Fie triunghiul ABC şi M un punct interior acestuia. Notăm cu $\{S\} = AM \cap BC$, $\{N\} = BM \cap AC$, $\{P\} = CM \cap AB$ şi $\{O\} = AM \cap PN$. Dacă $AM = 2MS$ şi $\frac{SB}{SC} = x$. Să se arate că:

(a) $\overrightarrow{AN} = \frac{2x}{3x+1}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{x+3}\overrightarrow{AB}$;
(b) Mijloacele segmentelor $(AB), (AC)$ şi O sunt trei puncte coliniare.

Enache Pătraşcu

Soluţie

(a) În triunghiul ASC, $N-M-B$, deci $\frac{NA}{NC} = \frac{2x}{x+1}$, deci $\overrightarrow{AN} = \frac{2x}{3x+1}\overrightarrow{AC}$ .. **2 puncte**
În triunghiul ABS, $P-M-C$, deci $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{x+1}$, deci $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{x+3}\overrightarrow{AB}$ .... **2 puncte**

(b) $\Delta BNC, S-M-A \Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{2}{3x+1}$, $\Delta BNP, M-O-A \Rightarrow \frac{OP}{ON} = \frac{3x+1}{x+3} = p$. Atunci $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1+p}\overrightarrow{AP} + \frac{p}{1+p}\overrightarrow{AN} = \frac{x+3}{4(x+1)}\overrightarrow{AP} + \frac{3x+1}{4(x+1)}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$, deci O este mijlocul lui (AS) .... **3 puncte**