Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2014

Ediţia 12+1

Focşani, februarie 2014

Clasa a 9-a

SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1. (a) Câte pătrate perfecte conţine o progresie aritmetică infinită care are primul termen 7 şi raţia 5 ?
(b) Fiind dată o progresie aritmetică infinită de numere naturale cu proprietatea că unul dintre termeni este 225, să se demonstreze că progresia conţine o infinitate de pătrate perfecte.

***

Soluţie

(a) $a_k = a_1 + (k-1)r = 7 + 5(k-1)$ .... **1 punct**
Deci a_k este de forma $5k+2$ şi are ultima cifră 2 sau 7, deci nu este pătrat perfect
.... **2 puncte**

(b) Fie $a_m = 225$. Fie r raţia progresiei date. Atunci $(15+kr)^2 = 225+30kr+r^2k^2 = a_m+r(30k+k^2r)$ .... **2 puncte**
$= a_m + p_k r = a_1 + (m-1)r + p_k r = a_1 + r(m+p_k-1) = a_{m+p_k}$, unde $p_k = 30k+k^2r$
.... **1 punct**
Deci $(15+kr)^2$ este termen al progresiei date, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ .... **1 punct**

Problema 2. Fie $M \subset (-1,1)$ o mulţime cu $n \geq 2$ numere reale. Arătaţi că există o partiţie a lui M în două submulţimi M_1 şi M_2 astfel încât dacă s_1 este suma elementelor lui M_1 şi s_2 este suma elementelor lui M_2, atunci $|s_1 - s_2| < 1$.

(M_1 şi M_2 reprezintă o partiţie a lui M dacă aceste sunt disjuncte şi $M_1 \cup M_2 = M$. Se consideră că suma elementelor mulţimii vide este 0)

Cristi Săvescu

Soluţie

Vom demonstra rezultatul cerut prin metoda inducţiei matematice.

Cazul $n = 2$. $M = \{a, b\}$. Avem aici 2 cazuri:
(1) $-1 < a \leq b \leq 0$ sau $0 \leq a \leq b < 1$. În fiecare dintre aceste cazuri $|a - b| < 1$ şi deci putem alege $M_1 = \{a\}$ şi $M_2 = \{b\}$ .... **1 punct**
(2) $-1 < a \leq 0 \leq b < 1$. Atunci alegem $M_1 = \phi$ şi $M_2 = \{a, b\}$. Suma elementelor din M_1 este 0 iar suma elementelor din M_2 este $a + b$, iar $-1 < a \leq a + b \leq b < 1$ .... **1 punct**

Fie $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Considerăm pasul de induţie P_{n-1} adevărat, adică dacă $M_{n-1} = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ atunci există o partiţionare a acestei mulţimi în $M_{(n-1),1}$ şi $M_{(n-1),2}$ având suma elementelor $s_{(n-1),1}$ respectiv $s_{(n-1),2}$ .... **1 punct**
unde presupunem fără a restrâge generalitatea că $s_{(n-1),1} > s_{(n-1),2}$ astfel încât $s_{(n-1),1} - s_{(n-1),2} < 1$ .... **1 punct**
Considerăm separat cazurile $x_n \geq 0$ şi $x_n < 0$ .... **1 punct**
Cazul 1. Termenul adiţional x_n satisface $1 > x_n \geq 0$. Atunci, alăturăm acest termen mulţimii $M_{(n-1),2}$, şi atunci $M_{n,1} = M_{(n-1),1}$ şi $M_{n,2} = M_{(n-1),2} \cup \{x_n\}$, iar $s_{n,1} - s_{n,2} = s_{(n-1),1} - (s_{(n-1),2} + x_n)$. Atunci $s_{n,1} - s_{n,2} = s_{(n-1),1} - s_{(n-1),2} - x_n < s_{(n-1),1} - s_{(n-1),2} < 1$ şi $s_{n,1} - s_{n,2} = s_{(n-1),1} - s_{(n-1),2} - x_n \geq 0 - x_n > -1$, adică cerinţa pasului de inducţie ($|s_{n,1} - s_{n,2}| < 1$) .... **1 punct**

Cazul 2. Termenul adiţional x_n satisface $-1 < x_n \leq 0$. Atunci, alăturăm acest termen mulţimii $M_{(n-1),1}$, şi atunci $M_{n,1} = M_{(n-1),1} \cup \{x_n\}$ şi $M_{n,2} = M_{(n-1),2}$, iar $s_{n,1} - s_{n,2} = s_{(n-1),1} + x_n - s_{(n-1),2}$. Atunci $s_{n,1} - s_{n,2} = s_{(n-1),1} + x_n - s_{(n-1),2} \leq s_{(n-1),1} - s_{(n-1),2} < 1$ şi $s_{n,1} - s_{n,2} = s_{(n-1),1} + x_n - s_{(n-1),2} \geq 0 + x_n > -1$, adică cerinţa pasului de inducţie ($|s_{n,1} - s_{n,2}| < 1$) .... **1 punct**

Problema 3. Pe laturile $[AB], [BC], [CD]$ şi $[DA]$ ale unui patrulater convex $ABCD$ se consideră punctele M, N, P respectiv Q. Fie G_1, G_2, G_3 şi G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AMQ, BNM, CNP respectiv DPQ.
Arătaţi că $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Dan Popoiu

Soluţie

Fie O un punct oarecare din plan. Atunci $3\vec{OG_1} = \vec{OA} + \vec{OM} + \vec{OQ}$ şi $3\vec{OG_3} = \vec{OC} + \vec{ON} + \vec{OP}$ .... **2 puncte**
Atunci $3(\vec{OG_1} + \vec{OG_3}) = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} + \vec{OQ}$ .... **2 puncte**
Analog $3(\vec{OG_2} + \vec{OG_4}) = \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} + \vec{OQ}$ .... **1 punct**
Atunci $G_1G_2G_3G_4$ paralelogram dacă şi numai dacă $\vec{OG_1} + \vec{OG_3} = \vec{OG_2} + \vec{OG_4}$ dacă şi numai dacă $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$ dacă şi numai dacă $ABCD$ paralelogram .... **2 puncte**

Problema 4. Pe fiecare latură a unui poligon convex cu n laturi ($n \geq 3$) se alege câte un punct şi se duce din acest punct un vector perpendicular pe latură, îndreptat spre exteriorul poligonului şi de lungime egală cu lungimea acestei laturi.
Arătaţi că suma tuturor acestori vectori este vectorul nul.

Dan Popoiu

Soluţie

Vom demonstra rezultatul prin inducţie dupa n... **1 punct**
Pentru $n = 3$ avem triunghiul ABC şi vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ perpedinculari pe BC, CA respectiv AB. Fie $\vec{BE} = \vec{a}$ şi $\vec{BD} = \vec{c}$ şi $\vec{BF} = \vec{BD} + \vec{BE}$ (1) .... **1 punct**
Atunci $BDFE$ este paralelogram, deci $\widehat{FEB} = 180^0 - \widehat{EBD} = \widehat{ABC}$ de unde $\Delta ABC \equiv \Delta FEB$ .... **1 punct**
Atunci $BF = AC$ (2) şi $\widehat{EBF} \equiv \widehat{BCA}$, iar cum $EB \perp BC$, atunci $BF \perp AC$ (3) .... **1 punct**
Din (1),(2) şi (3) avem $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ .... **1 punct**
Presupunem relaţia adevărată pentru poligonul convex cu n laturi $A_1A_2...A_n$, având vectorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}$ construiţi conform ipotezei. Atunci $\vec{v_1} + \vec{v_2} + ... + \vec{v_{n-1}} = -\vec{v_n}$ .... **1 punct**
Considerăm $\vec{v_{n+1}}, \vec{v_{n+2}}$ vectorii perpendiculari pe A_nA_{n+1}, respectiv $A_{n+1}A_1$. Atunci vectorii $\vec{v_{n+1}}, \vec{v_{n+2}}, -\vec{v_n}$ respectă ipoteza pentru poligonul $A_1A_nA_{n+1}$, deci $\vec{v_{n+1}} + \vec{v_{n+2}} - \vec{v_n} = 0$, adică $\vec{v_1} + \vec{v_2} + ... + \vec{v_{n-1}} + \vec{v_{n+1}} + \vec{v_{n+2}} = 0$ .... **1 punct**

Soluţie alternativă

Considerăm un punct oarecare O în plan şi construim vectorii $\vec{OK_i}, i = 1, 2, ..., n$ astfel încât $\vec{OK_i} = \vec{v_i}, i = 1, 2, ..., n$, unde $\vec{v_i}, i = 1, 2, ..., n$ sunt vectorii din ipoteză. Rotim toţi aceşti vectori în sens trigonometric cu 90^0 şi vom obţine vectorii $\vec{OP_i}$. Suma acestori vectori este un vector de modul egal cu $\sum \vec{OK_i}$. Dar suma $\sum \vec{OP_i}$ are termenii egali cu vectorii $\vec{A_iA_{i+1}}$, deci această suma este vectorul nul, de unde rezultă concluzia .... **7 puncte**