Subiecte

Subiectul I

Să se afle numerele reale x, y, z știind că au loc simultan relațiile:

$$x + y + z = 2013, \textbf{(1)}; \quad x^2 = yz, \textbf{(2)} \text{ și } y^2 = xz, \textbf{(3)}.$$

Barem de corectură și de evaluare

Dacă $x = 0$ din **(2)** și **(3)** rezultă că $y = 0$ și $z \in \mathbb{R}$, **(4)**. (1p)

Din **(1)** și **(4)** $\Rightarrow x = y = 0$ și $z = 2013$, soluție. (1p)

Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, din **(2)** și **(3)** $\Rightarrow z^2 = xy$, **(5)**. (1p)

Din **(2)**, **(3)** și **(5)** rezultă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = y = z$, **(6)**. (2p)

Din **(1)** și **(6)** rezultă $x = y = z = 671$. (1p)

Prin urmare, $(x, y, z) \in \{(0, 0, 2013), (671, 671, 671)\}$. (1p)

Altă abordare:

Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, atunci $\begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{y}{x} \\ y^2 = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 \\ y^2 = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(m, m, m)\}$,

$m \in \mathbb{R}^*$.

Subiectul II

Se dă numărul $A = (n - 5)(n - 2)(n + 2)(n - 4)(n - 3) - 1080$.

Arătați că A se divide cu:

a) 12, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$;

b) $n - 7$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

Barem de corectură și de evaluare

a) Numere întregi $n - 5$, $n - 4$, $n - 3$ și $n - 2$ sunt consecutive deci produsul lor se divide cu 3 și cu 4. (1p)

Cum $(3, 4) = 1$, rezultă că 12 divide produsul lor, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$. (1p)

b) Varianta 1

$A = [(n - 5)(n - 2)][(n - 4)(n - 3)](n + 2) - 1080$ (1p)

$A = (n^2 - 7n + 10)(n^2 - 7n + 12)(n + 2) - 1080$ (1p)

$A = [n(n - 7) + 10][n(n - 7) + 12](n + 2) - 1080$ (1p)

$A = \mathcal{M}_{n-7} + 120[(n - 7) + 9] - 1080$ (1p)

$A = \mathcal{M}_{n-7} + 1080 - 1080 = \mathcal{M}_{n-7}$. (1p)

Varianta 2

A = $(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)[(n-7)+9]-1080$ (1p)

A = $9(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$

A = $9(n-5)(n-4)(n-3)(n-7+5)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$ (1p)

A = $45(n-5)(n-4)(n-3)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$

A = $45(n-5)(n-4)(n-7+4)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$ (1p)

A = $45\cdot 4(n-5)(n-4)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$

A = $180(n-5)(n-7+3)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$

A = $540(n-5)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$ (1p)

A = $540(n-7+2)+\mathcal{M}_{n-7}-1080$

A = $1080+\mathcal{M}_{n-7}-1080$

A = $\mathcal{M}_{n-7}$. (1p)

Subiectul III

În centrul O al pătratului $ABCD$ cu latura de lungime a se consideră perpendiculara d pe planul acestuia. Să se arate că:

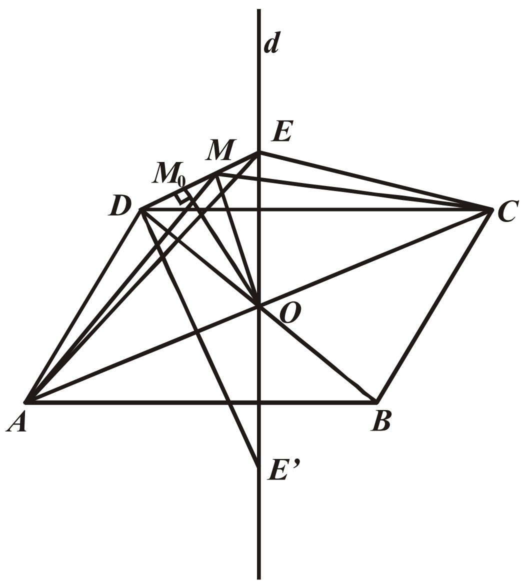
a) Există cel puțin două puncte pe dreapta d situate la distanța a de punctul D.

b) Dacă E este unul din punctele determinate la **a)**, atunci $AE \perp CE$.

c) Aflați distanța dintre dreptele AC și DE.

d) Dacă M este un punct mobil (variabil) pe segmentul (DE), determinați poziția punctului M astfel încât aria triunghiului MAC să fie minimă. În acest caz aflați aria triunghiului MAC.

Barem de corectură și de evaluare



a) Fie $E \in d$. În ΔDOE dreptunghic, dacă $DE = a$, cum $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ rezultă că $OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Reciproc, dacă $OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, atunci $DE = a$. (1p)

Însă și punctul E' simetricul lui E față de O satisface condiția dată, $DE' = a$. (1p)

b) În ΔAEC, OE este mediană și $OE = \dfrac{AC}{2}$, deci $m(\sphericalangle AEC) = 90°$. (1p)

c) Din $AC \perp d$, $AC \perp BD$ și $BD \cap d = \{O\}$, rezultă că $AC \perp (ODE)$, deci $AC \perp OM$, oricare ar fi $M \in DE$. (1p)

Dacă $OM_0 \perp DE$, atunci $OM_0 \perp AC$ și OM_0 este perpendiculara comună a dreptelor AC și DE.

Distanța dintre dreptele AC și DE este $OM_0 = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{a}{2}$. (1p)

d) Din $AC \perp (ODE)$ și $OM \subset (ODC)$ rezultă că $AC \perp OM$.

$\mathcal{A}_{MAC} = \dfrac{AC\cdot MO}{2}$ = minimă dacă MO este minimă, adică $M = M_0$. (1p)

$\mathcal{A}_{AMC} = a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ unități de arie. (1p)

Subiectul IV

Se dă ecuația $x^y + x^z + x^t = 31 \cdot x^{31}$.

a) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor naturale.

b) Câte soluții are ecuația în mulțimea numerelor naturale dacă $x \neq y \neq z \neq t \neq x$ și $x + y + z + t = 10$?

Barem de corectură și de evaluare

a) $x = 0$ implică $y, z, t \in \mathbb{N}^*$, soluție.

$x = 1$ implică $3 = 31$, contradicție! (1p)

Dacă $x \geq 2$ ecuația fiind simetrică în y, z și t putem considera ordinea $y \leq z \leq t$ și aceasta este echivalentă cu: $x^y \cdot (1 + x^{z-y} + x^{t-y}) = 31 \cdot x^{31}$, **(1)**. (1p)

Arătăm că dacă $y < 31$ sau $y \geq 32$ se obțin contradicții! (1p)

Prin urmare, $y = 31$ și ecuația **(1)** este echivalentă cu: $x^{31} \cdot (1 + x^{z-31} + x^{t-31}) = 31 \cdot x^{31} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + x^{z-31} + x^{t-31} = 31 \Leftrightarrow x^{z-31} \cdot (1 + x^{t-z}) = 30$, de unde $x^{z-31} \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Analizând toate cazurile se obțin soluțiile: $(x, y, z, t) \in \{(29, 31, 31, 32); (3, 31, 32, 34); (5, 31, 32, 33), (15, 31, 32, 32)\}$. (1p)

Prin urmare, ecuația din enunț are soluțiile: $(x, y, z, t) \in \{(0, m, n, p); (29, 31, 31, 32); (29, 31, 32, 31); (29, 32, 31, 31); (3; 31; 32; 34); (3; 31; 34; 32); (3; 32; 31; 34); (3; 32; 34; 31); (3; 34; 31; 32); (3; 34; 32; 31); (5; 31; 32; 33); (5; 31; 33; 32); (5; 32; 31; 33); (5; 32; 33; 31); (5; 33; 31; 32); (5; 33; 32; 31); (15; 31; 32; 32); (15; 32; 31; 32); (15; 32; 32; 31)\}$, unde $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

b) Suma soluțiilor ecuației date este egală cu 10 numai dacă $x = 0$ și $y, z, t \in \mathbb{N}^*$. Deci $y + z + t = 10$. Însă $10 = 1 + 2 + 7 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$. (1p)

Prin permutări circulare se obțin $4 \cdot 6 = 24$ de soluții. (1p)

Subiecte propuse de prof. Artur Bălăucă