Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 22 februarie 2014

Clasa a VI-a

SOLUȚII

Subiectul 1. a) Arătați că numărul $N = 2014 + \overline{abc6} + \overline{bca7} + \overline{cab8}$ este divizibil cu 185, oricare ar fi a, b, c cifre nenule în baza 10.

b) Determinați cele mai mici trei numere naturale consecutive a căror sumă se termină în 2014.

***

Soluție. a) Folosind descompunerea în baza 10, avem:

$N = 2014 + (1000a + 100b + 10c + 6) + (1000b + 100c + 10a + 7) + (1000c + 100a + 10b + 8)$.

.... 1p

Deducem că $N = 2035 + 1110 \cdot (a + b + c)$ 1p

și în final $N = 185 \cdot (11 + 6a + 6b + 6c) \Rightarrow N \;\vdots\; 185$. 1p

b) Suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3. Într-adevăr, dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci $x + (x+1) + (x+2) = 3(x+1) \;\vdots\; 3$. 1p

Deoarece numărul 2014 nu este divizibil cu 3, cel mai mic număr natural care se termină în 2014 este 22014. .... 1p

Rezolvând ecuația $x + (x+1) + (x+2) = 22014$ obținem $x = 7337$. 1p

Numerele căutate sunt: 7337, 7338, 7339. .... 1p

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 22 februarie 2014

Clasa a VI-a

SOLUȚII

Subiectul 2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \text{ și } T_n = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot \ldots \cdot S_n.$$

a) Calculați S_{100}.

b) Determinați numărul perechilor (k, p), $k, p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{S_k}{T_p} = 2014$.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluție. a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem:

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ... 1p

deci $S_{100} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{100\cdot 101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$. 1p

b) Avem $S_k = \frac{k}{k+1}$ 1p

și $T_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$. 1p

Atunci $\frac{S_k}{T_p} = 2014 \Leftrightarrow \frac{k}{k+1} \cdot (p+1) = 2014 \Leftrightarrow k \cdot (p+1) = 2014 \cdot (k+1)$. 1p

Astfel $k \mid 2014 \cdot (k+1)$ și cum $(k, k+1) = 1$, avem $k \mid 2014$ 1p

În concluzie, $k \in D_{2014} = \{1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007, 2014\}$, deci există 8 perechi (k, p) care îndeplinesc cerințele problemei 1p

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 22 februarie 2014

Clasa a VI-a

SOLUȚII

Subiectul 3. Să se determine numerele naturale a, b, c, d și numerele naturale prime consecutive $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$, știind că:

$$\frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2} = \frac{c}{p_3} = \frac{d}{p_4} \text{ și } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3132.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. $\frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2} = \frac{c}{p_3} = \frac{d}{p_4} = k,\ p_1 < p_2 < p_3 < p_4.$

Din $ap_2 = bp_1 \Rightarrow p_1 | ap_2$ și cum $(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow p_1 | a \Rightarrow k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$. 2p

$3132 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 29 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 87$

I. Dacă $p_1 \geq 5 \Rightarrow p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathfrak{M}_6 \pm 1 \Rightarrow p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2 \in \mathfrak{M}_{12} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 12n + 4,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow k^2(12n+4) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 87 \Leftrightarrow k^2(3n+1) = 3^2 \cdot 87 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 3$ și $3n + 1 = 87 \Leftrightarrow n = \frac{86}{3} \notin \mathbb{N}$. 1p

II. Dacă $p_1 = 3 \Rightarrow p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 9 + 25 + 49 + 121 = 204 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 \cdot 204 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 29 \Leftrightarrow k^2 \cdot 51 = 3^3 \cdot 29 \Leftrightarrow k^2 \cdot 17 = 3^2 \cdot 29 \Leftrightarrow k^2 = \frac{3^2 \cdot 29}{17} \notin \mathbb{N}$. 1p

III. Dacă $p_1 = 2 \Rightarrow p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 4 + 9 + 25 + 49 = 87 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 \cdot 87 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 87 \Rightarrow k = 6$ și $a = 12,\ b = 18,\ c = 30,\ d = 42$. 3p

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 22 februarie 2014

Clasa a VI-a

SOLUȚII

Subiectul 4. Se consideră unghiul $\sphericalangle MON$ cu măsura de 60° și punctele A, B astfel încât $O \in (AB)$ și punctele M, N sunt exterioare dreptei AB. Dacă $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOM$, iar $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BON$, calculați $\mathrm{m}(\sphericalangle EOF)$.

***

Soluție. Notăm $\mathrm{m}(\sphericalangle MOE) = \mathrm{m}(\sphericalangle EOA) = a$, $\mathrm{m}(\sphericalangle NOF) = \mathrm{m}(\sphericalangle FOB) = b$ și $\mathrm{m}(\sphericalangle EOF) = x$. Analizăm patru cazuri:

I. Dacă $A \in \mathrm{Int}(\sphericalangle MON)$, notând $\mathrm{m}(\sphericalangle AON) = c$, avem $x = a + b + c$.
Atunci $2a + c = 60^\circ$ și $2b + c = 180^\circ \Rightarrow 2(a + b + c) = 240^\circ \Rightarrow a + b + c = 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$. 2p

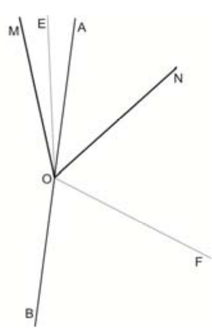
II. Dacă $B \in \mathrm{Int}(\sphericalangle MON)$, notând $\mathrm{m}(\sphericalangle BOM) = c$ și urmând același raționament ca la I, obținem $x = 120^\circ$. 1p

III. Dacă $A, B \in \mathrm{Ext}(\sphericalangle MON)$ și punctele A, M se află în același semiplan determinat de dreapta ON, atunci $x = a + b + 60^\circ$. Cum $2a + 2b + 60^\circ = 180^\circ$, avem $a + b = 60^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$. 2p

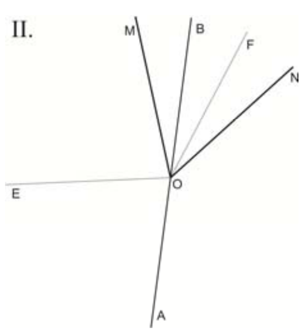
IV. Dacă $A, B \in \mathrm{Ext}(\sphericalangle MON)$ și punctele B, M se află în același semiplan determinat de dreapta ON, atunci $a + b - x = 60^\circ$ și $a + b + x = 180^\circ \Rightarrow 2x = 120^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$. 2p

În concluzie, $\mathrm{m}(\sphericalangle EOF) \in \{60^\circ, 120^\circ\}$.

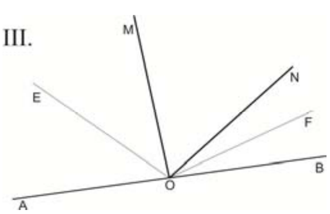
I.



II.



III.



IV.