Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2014

Ediţia 12+1

Focşani, februarie 2014

Clasa a 5-a

SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1. Să se afle trei numere naturale a, b, c ştiind că b împărţit la a dă câtul 27 şi restul 4, c împărţit la b dă câtul 3 şi restul 363, iar suma lor este 2014.

Soluţie

$b = 27a+4$ .... **1 punct**
$c = 3b+363$ .... **1 punct**
$c = 3(27a+4)+363 = 81a+375$ .... **1 punct**
$a+(27a+4)+(81a+375) = 2014$ .... **2 puncte**
$a = 15$ .... **1 punct**
$b = 409$, $c = 1590$ .... **1 punct**

Problema 2. (a) Să se afle numerele $\overline{ab}$ pentru care

$$\overline{ab} - \overline{ba} = a \cdot b + b.$$

(b) Fie $x = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2012}$ şi $y = 1 + 2 + 3 + ... + 2013$. Să se arate că $x - y$ este divizibil cu 10.

Soluţie

(a) $9a - 9b = ab + b$, deci $9a = b(a+10)$ .... **1 punct**
Deci $a+10|9a$, iar $a+10|9(a+10)$, deci $a+10|90$, deci $a \in \{5, 8\}$ .... **2 puncte**
$a = 5, b = 3$ deci $\overline{ab} = 53$ sau $a = 8, b = 4$ deci $\overline{ab} = 84$ .... **1 punct**
(b) $u.c.(2+2^2+2^3+2^4) = ... = u.c.(2^{2009}+2^{2010}+2^{2011}+2^{2012}) = 0$, deci $u.c.(x) = 1$
.... **1 punct**
$u.c.(y) = u.c.(2013 \cdot 1007) = 1$ .... **1 punct**
Deci $u.c.(x-y) = 0$, deci $10|x-y$ .... **1 punct**

Problema 3. (a) Să se afle numărul format din ultimile patru cifre ale numărului

$$x = 2^{2018} + 15 \cdot 2^{2014} + 2^{2012} + 2^3 + 2^2 + 2.$$

(b) Să se arate că $5^{2014} < 2^{4700}$.

Soluţie

(a) $x = 2^{2012} \cdot 125 + 14$ .... **1 punct**
$x = 2^{2011} \cdot 1000 + 14 = ...2014$ .... **2 puncte**
Numărul căutat este 2014 .... **1 punct**
(b) $5^{2014} = 5 \cdot 5^{2013} = 5 \cdot (5^3)^{671} = 5 \cdot 125^{671}$ .... **1 punct**
$5^{2014} < 5 \cdot 128^{671} = 5 \cdot 2^{4697}$ .... **1 punct**
$< 8 \cdot 2^{4697} = 2^{4700}$ .... **1 punct**

Problema 4. (a) Dacă a, b dau la împărţirea cu 3 resturile 1, respectiv 2, să se arate că $a + b$ este divizibil cu 3.

(b) Este adevărat că, oricare ar fi 6 numere naturale distincte ce au la descompunerea în factori primi doar factorii 2 sau 5, există două dintre ele al căror produs este cub perfect?

Soluţie

(a) $a + b = 3x + 1 + 3y + 2 = 3(x + y + 1)$
Deci $a+b$ este divizibil cu 3 .... **2 puncte**
(b) NU! .... **1 punct**
Considerăm, de exemplu, numerele $10, 10^4, 10^7, 10^{10}, 10^{13}, 10^{16}$. Produsul oricăror 2 nu este cub perfect .... **4 puncte**