Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2014

Ediţia 12+1

Focşani, februarie 2014

Clasa a 10-a

SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1. Demonstraţi că $lg2 \cdot lg3 \cdot ... lg2014 < (lg1008)^{2013}$.

***

Soluţie

$\sqrt[2013]{lg2 \cdot lg3 \cdot ... \cdot lg2014} \le \frac{lg2+lg3+...+lg2014}{2013}$ .... **2 puncte**

$\frac{lg2+lg3+...+lg2014}{2013} = lg \sqrt[2013]{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2014}$ .... **2 puncte**

$lg \sqrt[2013]{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2014} \le lg \frac{\frac{2014 \cdot 2015}{2}-1}{2013} = lg1008$ .... **2 puncte**

Finalizare .... **1 punct**

Problema 2. O funcţie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ are proprietatea P dacă verifică:

$$f(f(x) + y) = f(y) + x, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

(a) Demonstraţi că dacă f are proprietatea P, atunci $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$.
(b) Determinaţi toate funcţiile care au proprietatea P.

Cristi Săvescu

Soluţie

(a) Observăm că $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ avem $f(f(f(x) + y)) = f(f(y) + x) = f(x) + y$ (1) .... **2 puncte**
Considerăm $a \in \mathbb{Q}$ oarecare şi $y = a - f(x)$. Atunci (1) devine $f(f(a)) = a$, iar cum a a fost ales aleator, putem spune că $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ (2) .... **1 punct**

(b) Din (2) putem afirma că f este injectivă întrucât $f(a) = f(b)$ implică $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Revenind în relaţia din ipoteză, observăm că pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$ avem $f(f(x) + f(y)) = f(f(y)) + x = x + y$. Dar din (2) avem $x + y =$

$f(f(x+y))$, deci putem spune că $f(f(x)+f(y)) = f(f(x+y))$, iar cum f este injectivă, obţinem $f(x)+f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$ (3) .... **1 punct**
Observăm din (3) că $f(0) = 0$. Inductiv, folosind (3), se arată că pentru orice $a \in \mathbb{Q}_+$ avem $f(ax) = af(x)$ (se tratează $a = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, p \geq 0$ şi inducţia se face după p). Din (3) avem $0 = f(0) = f(-x+x) = f(-x) + f(x)$, deci $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. Atunci, $f(qa) = qf(a), \forall a, q \in \mathbb{Q}$ .... **1 punct**
Fie $A = \{f(x) - x | x \in \mathbb{Q}\}$. Cum $f(0) = 0$ putem spune că $0 \in A$.

Dacă $A = \{0\}$, atunci obţinem o soluţie, şi anume funcţia $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ .... **1 punct**
Dacă există $k \neq 0, k \in A$, fie $x_0 \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f(x_0) - x_0 = k$. Revenind în relaţia din ipoteză avem $f(f(x)-x) = f(-x) + x = -f(x) + x$, deci $f(k) = -k$. Cum orice număr raţional q poate fi scris $k \cdot \frac{q}{k}$, unde $\frac{q}{k} \in \mathbb{Q}$, atunci $f(q) = f(\frac{q}{k} \cdot k) = \frac{q}{k} f(k) = -q$. Aşadar şi funcţia $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{Q}$ verifică .... **1 punct**
Deci soluţiile sunt $f_1(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ şi $f_2(x) = -x, \forall x \in \mathbb{Q}$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi M, N, P, Q puncte pe laturile $[AB], [BC], [CD]$ respectiv $[DA]$ astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA}.$$

Demonstraţi că $MNPQ$ este inscriptibil într-un cerc concentric cu cel în care este înscris $ABCD$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat.

***

Soluţie

Fie O centrul cercului circumscris lui $ABCD$ originea planului complex şi R raza lui. Notăm cu x afixul punctului X.

Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci $b = ia, c = ib = -a, d = ic = -ia$ .... **1 punct**
Dacă notăm cu k valoarea comună a rapoartelor, atunci $m = \frac{a+kb}{k+1}$ şi analoagele .... **1 punct**
$|m| = \frac{|a+kb|}{k+1} = \frac{|ia+kib|}{k+1} = |n| = \frac{|-a-kb|}{k+1} = |p| = \frac{|-ia-ikb|}{k+1} = |q|$, deci $MNPQ$ inscriptibil într-un cerc centrat in O .... **1 punct**

Dacă $MNPQ$ este inscriptibil într-un cerc centrat în O, atunci $|m| = |n| = |p| = |q|$, deci $m\overline{m} = n\overline{n} = p\overline{p} = q\overline{q}$, adică $\frac{a\overline{a}+k^2b\overline{b}+a\overline{b}+\overline{a}b}{(k+1)^2} = \frac{b\overline{b}+k^2c\overline{c}+b\overline{c}+\overline{b}c}{(k+1)^2} = \frac{c\overline{c}+k^2d\overline{d}+c\overline{d}+\overline{c}d}{(k+1)^2} = \frac{d\overline{d}+k^2a\overline{a}+d\overline{a}+\overline{d}a}{(k+1)^2}$, adică $a\overline{b} + \overline{a}b = b\overline{c} + \overline{b}c = c\overline{d} + \overline{c}d = d\overline{a} + \overline{d}a = \alpha$, întrucât $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = R^2$ pentru că A, B, C, D concentrice pe un cerc de centru O .... **2 puncte**
Atunci $|a-b|^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) = 2R^2 - \alpha$. Analog $|b-c|^2 = |c-d|^2 = |d-a|^2 = 2R^2 - \alpha$, deci $ABCD$ este romb, iar cum acesta este inscriptibil, $ABCD$ este pătrat .... **2 puncte**

Problema 4. Spunem despre un disc închis D din planul complex că este *compact* dacă are raza nenulă şi pentru orice $z_1, z_2 \in D$ avem $z_1 z_2 \in D$.

(a) Fie D un disc compact. Dacă pentru orice $z \in D$ există $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ astfel încât $z = z_1 z_2$, arătaţi că D este discul unitate centrat în origine.
(b) Arătaţi că orice disc compact conţine în interiorul său originea.

Cristi Săvescu

Soluţie

(a) Fie $M = max\{|z| : z \in D\}$ şi fie $z_0 \in D$ astfel încât $|z_0| = M$. Atunci $z_0^2 \in D$ şi $|z_0^2| \leq M$, deci $M^2 \leq M$, deci $M \leq 1$. Atunci $|z| \leq 1, \forall z \in D$, deci $D \subseteq C(O,1) \cup IntC(O,1)$ .... **1 punct**
Fie $z_1, z_2 \in D$ astfel încât $z_0 = z_1 z_2$. Cum $M = |z_0| = |z_1||z_2| \leq M^2$ atunci $M \geq 1$, ceea ce confruntat cu rezultatul de mai sus, implică $M = 1$ .... **1 punct**
Atunci $|z_1||z_2| = 1$. Cum $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$, obţinem că $|z_1| = |z_2| = 1$. Atunci D are cel puţin 2 puncte de intersecţie cu cercul $C(O,1)$, iar cum $D \subseteq C(O,1) \cup IntC(O,1)$, rezultă că D este centrat în O şi are raza 1 .... **1 punct**
Observaţie: În acest caz că $z_1, z_2 \in D$ implică $|z_1 z_2| \leq 1$, deci $z_1 z_2 \in D$ şi pentru $z \neq 1$ avem $z = z \cdot 1$ şi $1 = i \cdot (-i)$, deci $D = C(O,1) \cup IntC(O,1)$ satisface.

(b) Fie $U = \{arg(z) : z \in D\}$ mulţimea argumentelor numerelor complexe din D (reduse la intervalul $[0, 2\pi)$). Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in U$, cu $\alpha_1 < \alpha_2$ şi $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$ şi $z_A, z_B \in D$ cu $arg(z_A) = \alpha_1, arg(z_B) = \alpha_2$. Atunci afirmăm că orice $\alpha_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ este conţinut in U. Întradevăr, dacă $\alpha_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, există $M \in [AB]$ astfel încât $arg(z_M) = \alpha_0$ iar cum $A, B \in D$, atunci $[AB] \subset D$, deci $M \in D$, deci $z_M \in D$ şi deci $\alpha_0 \in U$ .... **1 punct**
Fie $\alpha \in [0, 2\pi)$ oarecare şi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n > \frac{2\pi}{\alpha_2 - \alpha_1}$. Atunci $\frac{n\alpha_2}{2\pi} - \frac{n\alpha_1}{2\pi} > 1$, deci $\frac{n\alpha_2 - \alpha}{2\pi} - \frac{n\alpha_1 - \alpha}{2\pi} > 1$. Atunci există numărul natural k astfel încât $\frac{n\alpha_2 - \alpha}{2\pi} > k > \frac{n\alpha_1 - \alpha}{2\pi}$, adică $\alpha_2 > \frac{2k\pi + \alpha}{n} > \alpha_1$. Conform celor spuse mai sus, ne rezultă că $\frac{2k\pi + \alpha}{n} \in U$, deci există $z \in D$ cu $arg(z) = \frac{2k\pi + \alpha}{n}$. Cum $z^n \in D$ şi $arg(z^n) = 2k\pi + \alpha$, atunci $2k\pi + \alpha \in U$ sau $\alpha \in U$. Cum α a fost ales aleator, rezultă că $U = [0, 2\pi)$ .. **2 puncte**
Atunci, O trebuie să fie conţinut în interiorul lui D. Altfel, considerăm d dreapta care trece prin O şi este perpedinculară pe OO_1, unde O_1 este centrul lui D. Atunci, dreapta d împarte planul în 2 semiplane, dintre care unul este disjunct cu $Int(D)$, iar oricare ar fi z în semiplanul determinat de d care nu include D avem $z \notin D$, ceea ce ar implica existenţa unui interval $[\beta, \beta + \pi)$ disjunct cu U, lucru care contrazice cele demonstrate mai sus ....**1 punct**