



## Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2014

Ediția 12+1

Focșani, februarie 2014

Clasa a 10-a

**Problema 1.** Demonstrați că  $\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg 2014 < (\lg 1008)^{2013}$ .

**Problema 2.** O funcție  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  are proprietatea  $P$  dacă verifică:

$$f(f(x) + y) = f(y) + x, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

- (a) Demonstrați că dacă  $f$  are proprietatea  $P$ , atunci  $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ .  
(b) Determinați toate funcțiile care au proprietatea  $P$ .

**Problema 3.** Fie  $ABCD$  un patrulater inscriptibil și  $M, N, P, Q$  puncte pe laturile  $[AB], [BC], [CD]$  respectiv  $[DA]$  astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA}.$$

Demonstrați că  $MNPQ$  este inscriptibil într-un cerc concentric cu cel în care este înscris  $ABCD$  dacă și numai dacă  $ABCD$  este pătrat.

**Problema 4.** Spunem despre un disc închis  $D$  din planul complex că este *compact* dacă are raza nenulă și pentru orice  $z_1, z_2 \in D$  avem  $z_1 z_2 \in D$ .

- (a) Fie  $D$  un disc compact. Dacă pentru orice  $z \in D$  există  $z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2$  astfel încât  $z = z_1 z_2$ , arătați că  $D$  este discul unitate centrat în origine.  
(b) Arătați că orice disc compact conține în interiorul său originea.

Timp de lucru 3 ore

Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte