COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a V-a

Subiectul 1. O tablă de şah 8×8, conține 64 de pătrățele unitate colorate în alb şi negru. Aflați câte pătrate, compuse din pătrățele unitate de pe tabla de şah:
a) au acelaşi număr de pătrățele albe şi negre;
b) nu au acelaşi număr de pătrățele albe şi negre.
Soluție:
Orice pătrat $n \times n$, cu n impar conține n^2 pătrate, deci un număr diferit de pătrate albe şi negre **(1p)**
a) Pentru $n=2$ avem 7^2 pătrate 2×2 ce conțin 2 pătrate albe şi 2 pătrate negre
Pentru $n=4$ avem 5^2 pătrate 4×4 ce conțin 8 pătrate albe şi 8 pătrate negre
Pentru $n=6$ avem 3^2 pătrate 6×6 ce conțin 18 pătrate albe şi 18 pătrate negre
Pentru $n=8$ avem 1^2 pătrate 8×8 ce conțin 32 pătrate albe şi 32 pătrate negre
Deci există 84 pătrate cu acelaşi număr de pătrățele albe şi negre **(4p)**
b) Pentru $n=1,3,5,7$ avem $8^2+6^2+4^2+2^2=120$ pătrate care nu au acelaşi număr de pătrățele albe şi negre **(2p)**

Subiectul 2.
a) Aflați numerele naturale de trei cifre care se măresc de 9 ori dacă li se adaugă o cifră în față.
b) Suma a 63 de numere naturale distincte este egală cu 2012. Aflați produsul celor mai mici 10 numere dintre cele 63 de numere.
Soluție:
a) Fie $\overline{abc}$ numărul cerut
$\overline{dabc} = 9\cdot\overline{abc} <=> 1000d = 8\cdot\overline{abc} <=> 125d = \overline{abc}$
Atunci $d\in\{1,2,...,7\}$ şi $\overline{abc}\in\{125,250,375,500,625,750,875\}$ **(3p)**
b) Dacă sunt toate numerele nenule, atunci suma celor 63 de numere este cel puțin $(63\cdot 64):2=2016$ fals **(2p)**
Deci, cel mai mic număr este 0 şi produsul cerut este 0 **(2p)**

Subiectul 3.
a) Aflați numerele naturale de două cifre ce se împart exact la 17, apoi pe cele care se împart exact la 23.
b) Fie N un număr natural cu prima cifră 3 şi oricare număr format cu două cifre consecutive ale lui N în ordinea în care apar în numărul N, se împart exact la 17 sau la 23.

i) Găsiți numărul N, cu proprietățile de mai sus, știind că are 7 cifre.

ii) În cazul în care N are 2013 cifre, găsiți ultima cifră a numărului N.

Soluție:
a) divizibile cu 17: 17, 34, 51, 68, 85
divizibile cu 23: 23, 46, 69, 92 **(1p)**
b) i) Numerele sunt 3468517 şi 3469234 **(2p)**
ii) Din a) se observă că nu sunt numere de forma $\overline{7a}$ care să se împartă exact nici la 17, nici la 23, prin urmare, numerele de tipul 3468… pot avea maxim 7 cifre **(2p)**
La numerele care încep cu 34692… se observă că cifrele se repetă din 5 în 5
Cum $2013:5=402 rest 3$, rezultă că a 2013-a cifră a numărului este 6 **(2p)**

Subiectul 4. Se dă mulțimea: A = {a_1, a_2, a_3, …, a_{2012}, a_{2013}}, unde a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 17, a_4 = 717, a_5 = 17717, a_6 = 71717717, … (fiecare element al mulțimii A este un număr format prin „lipirea“ celor două numere din fața sa). Aflați:

a) Câte cifre are a_{11}?

b) a 16-a cifră a lui a_{2013}.

c) a 20-a cifră a lui a_{2012}. Justificați răspunsurile!

Soluție:
a) a_1 şi a_2 au o cifră; a_3 are 1+1=2 cifre;
a_4 are 1+2=3 cifre ………a_{11} are 89 cifre **(3p)**
b) Se observă că a_9 are mai mult de 16 cifre, iar primele 16 cifre ale numerelor a_{11}, a_{13}, …, a_{2013} sunt aceleaşi cu primele 16 cifre a lui a_{2013}
Deci a 16-a cifră a lui a_{2013} este 7 **(2p)**
c) a_8 are mai mult de 20 cifre, iar primele 20 cifre ale numerelor a_{10}, a_{12}, …, a_{2012} sunt aceleaşi cu primele 20 cifre a lui a_{2012}. A 20-a cifră a lui a_{2012} este 1. **(2p)**