COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a IX-a

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n\ge 1}$ un şir neconstant pentru care $3(a_1+a_2+...+a_n)=n\cdot a_{n+1}$, oricare ar fi n număr natural nenul. Să se arate că şirul $(b_n)_{n\ge 1}$, definit prin $n\cdot b_n = a_n$ este o progresie aritmetică.

Soluție: $P(n): a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}a_1,\ \forall n\in N^*$ **(4p)**

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{2}a_1$ => $(b_n)_{n\ge 1}$ progresie aritmetică **(3p)**

Subiectul 2. Să se arate că:

a) Dacă $[n\cdot a]=[n\cdot b]$, oricare ar fi $n\in N^*$, atunci $a=b$;

b) $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{8}{11}\cdot\dfrac{14}{17}\cdot ...\cdot\dfrac{6n-4}{6n-1}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, pentru orice $n\in N^*$.

Soluție: a) Presupunem că $a\ne b$

$[n\cdot a]=[n\cdot b] \Rightarrow |n\cdot a-n\cdot b|<1 \Rightarrow n<\dfrac{1}{|a-b|}\quad \forall n\in N^*$ (Fals!)

Deci $a=b$. **(3p)**

b) $P(n): \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{8}{11}\cdot\dfrac{14}{17}\cdot ...\cdot\dfrac{6n-4}{6n-1}<\dfrac{1}{\sqrt{4n+1}},\ \forall n\in N^*$ **(3p)**

Din $\dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ rezultă concluzia **(1p)**

Subiectul 3. Fie triunghiul *ABC* şi punctele $M\in(AB)$, $S\in(BC)$, $P\in(CA)$ astfel încât *AM*, *BS*, *CP* să fie direct proporționale cu 2,3 şi 4. Dacă *G* este centrul de greutate al triunghiului *MSP* şi $6AB\cdot\overrightarrow{AG}+4BC\cdot\overrightarrow{BG}+3CA\cdot\overrightarrow{CG}=\vec{0}$, atunci *AB*, *BC*, *CA* sunt direct proporționale cu 2,3 şi 4.

Soluție: $\dfrac{AM}{2}=\dfrac{BS}{3}=\dfrac{CP}{4}=x$ **(1p)**

$6AB\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GM})+4BC\cdot(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SG})+3CA\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PG})=\vec{0}$ **(1p)**

$12x\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC})+6AB\cdot\overrightarrow{MG}+4BC\cdot\overrightarrow{SG}+3CA\cdot\overrightarrow{PG}=\vec{0}$ **(1p)**

$6AB\cdot\overrightarrow{MG}+4BC\cdot\overrightarrow{SG}+3CA\cdot(-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{SG})=\vec{0}$ **(1p)**

$(6AB-3CA)\cdot\overrightarrow{MG}+(4BC-3CA)\cdot\overrightarrow{SG}=\vec{0}$ **(1p)**

Cum $\overrightarrow{MG}$ şi $\overrightarrow{SG}$ sunt necoliniari obținem $6AB-3CA=4BC-3CA=0$

Adică $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{BC}{3}=\dfrac{AC}{4}$ **(2p)**

Subiectul 4. Se dă triunghiul ABC şi punctele $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$, $C_1\in(AB)$, $A_2\in(B_1C_1)$, $B_2\in(A_1C_1)$, $C_2\in(A_1B_1)$. Se consideră condițiile ca următoarele triplete de drepte (i) (AA_1,BB_1,CC_1), (ii) (A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2), (iii) (AA_2,BB_2,CC_2) să fie concurente. Să se arate că dacă au loc două concurențe atunci are loc şi a treia.

Soluție:

Fie $AA_2\cap BC=\{A_3\}$, $BB_2\cap AC=\{B_3\}$, $CC_2\cap AB=\{C_3\}$

$\dfrac{S_{AC_1A_2}}{S_{ABA_3}}=\dfrac{AA_2}{AA_3}\cdot\dfrac{AC_1}{AB}$, $\dfrac{S_{AA_2B_1}}{S_{AA_3C}}=\dfrac{AA_2}{AA_3}\cdot\dfrac{AB_1}{AC}$

Deci $\dfrac{S_{AC_1A_2}}{S_{AA_3B_1}}\cdot\dfrac{S_{AA_3C}}{S_{AA_3B}}=\dfrac{AC_1}{AB}\cdot\dfrac{AC}{AB_1}$, de unde $\dfrac{A_3C}{A_3B}=\dfrac{A_2B_1}{A_2C_1}\cdot\dfrac{AC_1}{AB}\cdot\dfrac{AC}{AB_1}$ **(3p)**

Analog $\dfrac{B_3A}{B_3C}=\dfrac{B_2C_1}{B_2A_1}\cdot\dfrac{BA_1}{BC}\cdot\dfrac{BA}{BC_1}$ şi $\dfrac{C_3B}{C_3A}=\dfrac{C_2A_1}{C_2B_1}\cdot\dfrac{CB_1}{CA}\cdot\dfrac{CB}{CA_1}$

Atunci $\dfrac{A_3C}{A_3B}\cdot\dfrac{B_3A}{B_3C}\cdot\dfrac{C_3B}{C_3A}=\dfrac{A_2B_1}{A_2C_1}\cdot\dfrac{AC_1}{AB}\cdot\dfrac{AC}{AB_1}\cdot\dfrac{B_2C_1}{B_2A_1}\cdot\dfrac{BA_1}{BC}\cdot\dfrac{BA}{BC_1}\cdot\dfrac{C_2A_1}{C_2B_1}\cdot\dfrac{CB_1}{CA}\cdot\dfrac{CB}{CA_1}$ **(3p)**

de unde concluzia este imediată **(1p)**