COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a VIII-a

Subiectul 1. Numim *număr special* un număr de forma $a+b\sqrt{3}$ unde $a,b\in\mathbb{Z}$ şi $a^2-3b^2=1$.

a) Să se arate că $7+4\sqrt{3}$ este un *număr special*;
b) Să se demonstreze că produsul a două *numere speciale* este un *număr special*;
c) Să se justifice faptul că există o infinitate de *numere speciale*.

Soluție:

a) $a=7, b=4$ şi $a^2-3b^2=49-48=1 \Rightarrow 7+4\sqrt{3}$ este *special* **(2p)**

b) Fie $x=a+b\sqrt{3}$, $y=c+d\sqrt{3}$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ şi $a^2-3b^2=c^2-3d^2=1$

Atunci $xy=(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}=m+n\sqrt{3}$

şi $m^2-3n^2=(a^2-3b^2)(c^2-3d^2)=1$ deci xy este *special* **(3p)**

c) $(7+4\sqrt{3})^n$ este *special* pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $(7+4\sqrt{3})^k\neq 1$ **(2p)**

Subiectul 2. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Considerăm ecuația $\sqrt{(x-2n)(x-2n-1)}=x-1$.

1) Să se arate că ecuația are o singură soluție, şi că ea aparține mulțimii $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

2) Să se precizeze primele două cifre care sunt după virgulă din scrierea zecimală a soluției ecuației.

Soluție:

1) $(x-2n)(x-2n-1)=(x-1)^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{4n^2+2n-1}{4n-1}=n+\dfrac{3n-1}{4n-1}\in(n,n+1)$ **(3p)**

2) pentru $n\geq 7$ avem $\dfrac{74}{100}<\dfrac{3n-1}{4n-1}<\dfrac{75}{100}$ şi atunci primele două cifre care sunt după virgulă sunt 7 şi 4 **(2p)**

pentru $n=1$ avem $x=1,66...$
pentru $n=2$ avem $x=2,71...$
pentru $n=3$ avem $x=3,72...$
pentru $n=4$ avem $x=4,73...$
pentru $n=5$ avem $x=5,73...$
pentru $n=6$ avem $x=6,73...$ **(2p)**

Subiectul 3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a, considerăm punctul $E \in [B'C]$ astfel încât $B'E = \frac{1}{4}B'C$. Dacă O' este centrul feței $A'B'C'D'$, aflați:

a) măsura unghiului dintre dreptele $O'E$ şi $A'D$;

b) distanța dintre dreptele $O'E$ şi $A'D$.

Soluție:

a) $\Delta B'CD$ este echilateral, $O'E \| D'M$ (M mijlocul lui $[B'C]$)

$D'M \perp B'C \Rightarrow O'E \perp B'C$

Dar $A'D \| B'C$ şi atunci $O'E \perp A'D \Rightarrow m(\sphericalangle O'E, A'D) = 90°$ **(3p)**

b) Din $B'D' \| BD$ şi $A'D \| B'C$ rezultă $(B'D'C) \| (A'BD)$

Diagonala $[AC']$ este perpendiculară pe aceste plane şi ea este împărțită de acestea în 3 părți egale.

Atunci $d(A'D, O'E) = d((B'D'C),(A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **(4p)**

Subiectul 4. Se consideră un cub cu muchia de lungime 1 şi P un punct în interiorul cubului. Se notează cu $s(P)$ suma pătratelor distanțelor de la P la cele 6 fețe şi cu $S(P)$ suma pătratelor distanțelor de la P la cele 8 vârfuri. Să se arate că $s(p) + S(P) \geq \frac{15}{2}$ şi să se precizeze poziția lui P pentru care are loc egalitatea.

Soluție:

Fie a_1 şi $a_1^{'}$ distanțele de la P la două fețe opuse

Atunci avem $a_1 + a_1^{'} \geq \frac{(a_1 + a_1^{'})^2}{2} = \frac{1}{2}$ şi analoagele

Deducem $s(P) \geq \frac{3}{2}$ **(2p)**

Fie m_1 şi $m_1^{'}$ distanțele de la P la două vârfuri opuse

Atunci avem $m_1 + m_1^{'} \geq \frac{(m_1 + m_1^{'})^2}{2} \geq \frac{d^2}{2} = \frac{3}{2}$ şi analoagele

Deducem $S(P) \geq 6$ **(3p)**

Atunci avem $s(p) + S(P) \geq \frac{15}{2}$ **(1p)**

Egalitatea are loc pentru P centrul cubului **(1p)**