COLEGIUL NAŢIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a VI-a

Subiectul 1.
a) Aflați numerele naturale mai mici decât 1000 care împărțite pe rând, la numerele 18, 24, 42 şi 56 dau, de fiecare dată, restul 7.
b) Să se scrie două cifre la dreapta numărului 2013 astfel ca numărul obținut să fie divizibil cu 36. Aflați numerele astfel obținute.
Soluție:
a) Din teorema împărțirii cu rest avem $n=18a+7$, $n=24a+7$, $n=42a+7$, $n=56a+7$
Atunci $18|n-7$, $24|n-7$, $42|n-7$, $56|n-7$ $=>[18,24,42,56]|n-7$ $=>504|n-7$
Deci $n=504k+7 => k\in\{0,1\}$ $n\in\{7,511\}$ **(3p)**
b) Fie $\overline{2013ab}$ numărul căutat
Din $9|\overline{2013ab} => a+b\in\{3,12\}$
Dacă $a+b=3$ şi din $4|\overline{2013ab}$ obținem $a=1$ şi $b=2$
Dacă $a+b=12$ şi din $4|\overline{2013ab}$ obținem $a=4$ şi $b=8$ sau $a=8$ şi $b=4$
Deci $\overline{2013ab}\in\{201312, 201348, 201384\}$ **(4p)**

Subiectul 2. Un joc are trei beculețe. Primul beculeț se aprinde la fiecare două secunde. Al doilea beculeț se aprinde prima dată la o secundă după aprinderea primului, apoi la fiecare 3 secunde. Al treilea beculeț se aprinde prima dată la a doua aprindere a primului, apoi la fiecare 7 secunde.
a) Arătați că, la un moment dat, toate beculețele vor fi aprinse simultan.
b) În primele 5 minute, de câte ori vor fi aprinse beculețele simultan?
Soluție:
a) Dacă cele 3 beculețe se aprind simultan după *n* secunde, atunci avem
$n=2a=3b+1=7c+2$
Cel mai mic număr natural care îndeplineşte condiția este 16
Deci, beculețele se aprind simultan, prima dată, după 16 secunde de la aprinderea primului bec **(3p)**
b) Avem $n-16=2(a-8)=3(b-5)=7(c-2)=>[2,3,7]|n-16=>42|n-16$
Prin urmare $n=42k+16$
Inecuația $42k+16\le 300$ are soluțiile $k=0,1,...,6$
În primele 5 minute cele 3 beculețe se aprind simultan de 7 ori **(4p)**

Subiectul 3. Fie mulțimea A = {1, 2, 3, …, 2011, 2012}.

a) Găsiți o submulțime M a mulțimii A cu 1007 elemente şi cu proprietatea că oricare ar fi două elemente distincte din M, suma lor nu aparține mulțimii M.

b) Se ştie că A_1 şi A_2 sunt două submulțimi disjuncte ale mulțimii A ce au cardinalul 1006. Arătați că există numerele naturale distincte *a* şi *b* cu $a, b \in A_1$ şi $a + b \in A_2$ sau există numerele naturale distincte *c* şi *d* cu $c, d \in A_2$ şi $c + d \in A_1$.

Soluție:

a) Putem considera M = {1006, 1007, 1008, …, 2011, 2012}.

Dacă $x, y \in M$ atunci $x + y \geq 2013$ şi $x + y \notin M$ **(2p)**

b) Presupunem că $m+n \in A_1$ oricare ar fi $m,n \in A_1$ şi $p+q \in A_2$ oricare ar fi $p,q \in A_2$

Considerăm cazul $1 \in A_1$

Fie *t* cel mai mic număr natural cu $t \in A_1 - \{1\}$

Atunci $A_1 = \{1, t, t+1, ..., 2012\}$ şi $A_2 = \{2, 3, ..., t-1\}$ **(3p)**

Cum $card(A_1) = 1006 => t = 1008$

Dar $2, 1006 \in A_2$ şi $2 + 1006 \notin A_2$ (contradicție) **(2p)**

Subiectul 4. Se dau semidreptele (*OA*, (*OB*, (*OC*, (*OD*, (*OE* şi (*OF* în această ordine. Se ştie că m($\sphericalangle BOC$) = 10 · m($\sphericalangle AOB$); m($\sphericalangle DOE$) = 21 · m($\sphericalangle COD$) şi m($\sphericalangle AOF$) = 45 · m($\sphericalangle EOF$). Dacă măsurile unghiurilor formate sunt exprimate în grade prin numere naturale nenule, iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$ sunt exprimate în grade prin numere naturale prime, aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOD$.

Soluție:

Notăm $m(\sphericalangle AOB) = n$, $m(\sphericalangle COD) = m$, $m(\sphericalangle EOF) = p$, *m* şi *n* prime

Cazul $m(\sphericalangle AOF) < 180°$

Avem $n + 10n + m + 21m + p = 45p <=> n + 2m = 4p$

Din $45p < 180° => p < 4$

$p = 1 => n + 2m = 4$ imposibil

$p = 1 => n + 2m = 8$ şi atunci $n = 2, m = 3$ şi $m(\sphericalangle AOD) = 25°$

$p = 1 => n + 2m = 12$ şi atunci $n = 2, m = 5$ şi $m(\sphericalangle AOD) = 27°$ **(3p)**

Cazul $m(\sphericalangle AOF) = 180°$

Avem $n + 10n + m + 21m + p = 180° = 45p => p = 4$ şi $n + 2m = 16$

Atunci obținem $n = 2, m = 7$ şi $m(\sphericalangle AOD) = 29°$ **(2p)**

Cazul (*OB* şi (*OF* sunt situate de o parte şi alta a lui (*OA*

$m(\sphericalangle AOF) = 180°$

Avem $n + 10n + m + 21m + p + 45p = 360 <=> 11n + 22m + 46p = 360 => n$ par

Atunci $n = 2$ şi $11n + 23p = 169 => m \leq 13$

Analizând cazurile $m \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ se obține soluție numai pentru $m = 7$.

În acest caz $p = 4$ şi $m(\sphericalangle AOF) = 180°$ (fals!)

Prin urmare $m(\sphericalangle AOD) \in \{25°, 27°, 29°\}$ **(2p)**