COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

# Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
# Focşani, 23 februarie 2013

## Clasa a X-a

**Subiectul 1.** Fie *n* un număr natural, $n \ge 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in (1, +\infty)$. Arătați că:

a) $\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \log_{a_3} a_4 + ... + \log_{a_n} a_1 \ge n$;

b) $\log_3(2a_1 + a_2) + \log_3(2a_2 + a_3) + ... + \log_3(2a_n + a_1) \ge$
$\ge \log_3(a_1) + \log_3(a_2) + ... + \log_3(a_n) + n$.

**Soluție**:
a) Aplicând inegalitatea mediilor obținem

$\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + ... + \log_{a_n} a_1 \ge n \cdot \sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot ... \cdot \log_{a_n} a_1} = n$ **(3p)**

b) Din inegalitatea mediilor avem: $\log_3\left(\frac{2a_1 + a_2}{3}\right) \ge \log_3 \sqrt[3]{a_1^2 a_2}$ <=>

<=> $\log_3(2a_1 + a_2) - 1 \ge \frac{2\log_3 a_1 + \log_3 a_2}{3}$ **(2p)**

Însumând inegalități analoage se obține concluzia. **(2p)**

**Subiectul 2.** Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ afixele punctelor necoliniare *A*, *B*, *C* cu proprietatea $|z_2 - z_3| + |z_1 - z_3| + |z_1 - z_2| = 1$ şi considerăm numărul complex $z = z_1 \cdot |z_2 - z_3| + z_2 \cdot |z_1 - z_3| + z_3 \cdot |z_1 - z_2|$. Dacă *M* este de afix *z*, atunci *M* este la egală distanță de dreptele *AB*, *AC* şi *BC*.

**Soluție**: Fie *AD* bisectoare în $\Delta ABC$ şi *I* centrul cercului înscris

Din teorema bisectoarei în $\Delta ABC$ avem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_3|} = k$

Atunci $z_D = \frac{1}{k+1} z_1 + \frac{k}{k+1} z_2$ **(3p)**

Din t. bisectoarei în $\Delta ABD$ avem $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{|z_1 - z_2| + |z_1 - z_3|}{|z_2 - z_3|} = p$

Atunci $z_I = \frac{1}{p+1} z_1 + \frac{p}{p+1} z_2$ **(2p)**

Obținem $z_I = z_1 \cdot |z_2 - z_3| + z_2 \cdot |z_1 - z_3| + z_3 \cdot |z_1 - z_2| = z$

Aşadar $M = I$ şi atunci $d(M, AB) = d(M, AC) = d(M, BC)$ **(2p)**

**Subiectul 3.** Fie $\alpha \in R^*$ şi $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale cu proprietatea $a_k + a_{n-k} = \alpha$, pentru orice $k = 0,1,...,n$, $n \geq 2$. Dacă $x$ este un număr complex de modul 1 care verifică egalitatea $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$, atunci arătați că $a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + ... + a_n x + a_0 = 0$.

**Soluție**:

Conjugând egalitatea din ipoteză şi ținând cont că $\bar{x} = \frac{1}{x}$ avem

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ **(2p)**

Prin însumare se obține $\alpha(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = 0 \Rightarrow x^{n+1} = 1$ **(3p)**

Înmulțind egalitatea din ipoteză cu $x$ şi folosind $x^{n+1} = 1$ se obține

$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + ... + a_n x + a_0 = 0$ **(2p)**

**Subiectul 4.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ o funcție monotonă cu proprietatea $f(x+3) = f(x) + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că ecuația $f(x) = x$ are cel puțin o soluție.

**Soluție**:

Din $f$ monotonă şi $f(x+3) > f(x)$ rezultă $f$ crescătoare **(1p)**

Fie $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = f(x) - x$

Concluzia este echivalentă cu: ecuația $g(x) = 0$ are cel puțin o soluție

Avem $g(x+3) = f(x+3) - x - 3 = f(x) - x - 2 = g(x) - 2$ şi prin inducție se obține $g(x+3k) = g(x) - 2k$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ **(2p)**

Presupunem că $g(x)$ este impar pentru orice $x \in \mathbb{Z}$

Atunci $f(0), f(2)$ sunt impare şi $f(1), f(3)$ sunt pare

Din $f$ crescătoare se obțin $f(0) < f(1) < f(2) < f(3) = f(0) + 1$ imposibil **(2p)**

Deci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $g(a) = 2b$

Atunci $g(a+3b) = g(a) - 2b = 0$ de unde rezultă concluzia **(2p)**