COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 17 martie 2012

Clasa a XII-a

Subiectul 1. a) Dacă o mulțime K de matrice cu $n \geq 1$ elemente este grup împreună cu operația de înmulțire a matricelor, atunci toate matricele au acelaşi rang.

b) Fie $G \subset M_n(\mathbb{C})$ o mulțime nevidă finită şi G^* mulțimea adjunctelor matricelor din G. Se ştie că G şi G^* sunt grupuri împreună cu operația de înmulțire a matricelor şi că $G \cup G^*$ conține cel puțin o matrice singulară. Fie $S = \sum_{A \in G^*} A$. Arătați că $\operatorname{tr}(S)$ este un număr întreg cel mult egal cu 1.

Subiectul 2. Fie G un grup cu $2n$ elemente, $n \geq 2$. Dacă G are două subgrupuri H_1 şi H_2 fiecare cu câte n elemente astfel încât $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, să se arate că:

a) pentru orice $x_1 \in H_1 - \{e\}$ şi orice $x_2 \in H_2 - \{e\}$ avem $x_1 x_2 = c$, unde $\{c\} = G - (H_1 \cup H_2)$;

b) $n = 2$ şi G este izomorf cu grupul lui Klein.

Subiectul 3. Arătați că $\int_0^1 e^{t^2} dt \leq \frac{3e-5}{2}$.

Subiectul 4. Să se determine funcțiile $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ şi $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ştiind că $xf(x)$ este o primitivă pentru $g(x)$, iar $xg(x)$ este o primitivă pentru $f(x)$.

Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!