COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 17 martie 2012

Clasa a XI-a

Subiectul 1. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det(A^2 + B^2) = 0$.

a) Să se arate că $\det A = \det B$;

b) Dacă în plus $\det A \neq 0$ atunci $A^2 + B^2 = O_2$.

Subiectul 2. Fie $n \geq 2$ şi $f : M_n(\mathbb{C}) \to \{0,1,2,...,n\}$ o funcție surjectivă cu proprietatea că $f(AB) \leq f(A)$ pentru orice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Arătați că $f(A) = rang(A)$, pentru orice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Subiectul 3. Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$.

i) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ demonstrați că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}}{n} = 0;$$

ii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ şirul definit prin $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)}}{n}$, unde $\sigma \in S_n$, este convergent la $a \cdot b$.

Subiectul 4. Fie $k \geq 1$şi $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcție care verifică $|f(x) - f(y)| < |x - y|^k$ pentru orice $x, y \in [a,b]$ cu $x \neq y$. Arătați că ecuația $f(x) = x$ are exact o soluție.

Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!