
**COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”**

Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea

Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/


# Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
# Focşani, 17 martie 2012

## Clasa a IX-a – Soluții şi barem

**Subiectul 1.** Fie $n$ număr natural cu $n \geq 2$. Demonstrați că dacă primele două zecimale după virgulă ale numărului $\sqrt{n(n+2)}$ sunt egale, atunci ele sunt egale şi cu a doua zecimală după virgulă a numărului $\sqrt{n(n+1)}$.

**Soluție**:

Observăm că $\left[\sqrt{n(n+2)}\right] = \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n$ **(2p)**

$n = 2$ cu $\left[\sqrt{n(n+2)}\right] = \sqrt{8} = 2,82...$ şi $n = 3$ cu $\left[\sqrt{n(n+2)}\right] = \sqrt{15} = 3,87...$ nu convin

Pt. $n \geq 4$ $\quad \sqrt{n(n+2)} \quad = \sqrt{n(n+2)} - n = \dfrac{2n}{n+\sqrt{n(n+2)}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}} = 0,89...$

Atunci primele două zecimale după virgulă ar trebui să fie 99 **(1p)**

Deci $\quad \sqrt{n(n+2)} \quad \geq 0,99 <=> \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}} \geq \dfrac{99}{100} <=> n \geq \dfrac{9801}{200} <=> n \geq 50$ **(1p)**

Observăm că $\quad \sqrt{n(n+1)} \quad = \sqrt{n(n+1)} - n = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} < \dfrac{1}{2} = 0,5$ **(1p)**

şi că $\quad \sqrt{n(n+1)} \quad = \sqrt{n(n+1)} - n = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} \geq 5(\sqrt{102}-10) = 0,497...$ **(1p)**

Aşadar a doua zecimală este 9. **(1p)**

**Subiectul 2.** Să se determine $a$ număr real astfel încât $\left[\sqrt{n+a}+\dfrac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

**Soluție**:

Pentru $n = 1$ avem $\left[\sqrt{1+a}+\dfrac{1}{2}\right] = 1 <=> -\dfrac{3}{4} \leq a < \dfrac{5}{4}$ **(1p)**

Pentru $n = 2$ avem $\left[\sqrt{2+a}+\dfrac{1}{2}\right] = 1 <=> -\dfrac{7}{4} \leq a < \dfrac{1}{4}$ **(1p)**


**COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”**
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Obținem că $a \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ şi arat că $\left[\sqrt{n+a}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall a \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Fie $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=p$, $p \in \mathbb{N}^*$ $<=> p \le \sqrt{n}+\frac{1}{2} < p+1 <=> p^2-p+\frac{1}{4} \le n < p^2+p+\frac{1}{4}$

Deoarece $n \in \mathbb{N}^*$ obținem că $p^2-p+1 \le n \le p^2+p$ **(2p)**

Atunci $p^2-p+a+1 \le n+a \le p^2+p+a$ $=> p^2-p+\frac{1}{4} \le n+a < p^2+p+\frac{1}{4}$ **(2p)**

Obținem astfel $p-1 \le \sqrt{n+a}+\frac{1}{2} < p <=> \left[\sqrt{n+a}+\frac{1}{2}\right]=p$ **(1p)**

**Subiectul 3.** Fie două cercuri concentrice de centru *O*. Dacă *ABC* este un triunghi neechilateral înscris în cercul interior, atunci există exact două puncte $P_1$ şi $P_2$ pe cercul exterior astfel încât $\overrightarrow{P_iA}+\overrightarrow{P_iB}+\overrightarrow{P_iC}$ şi $\overrightarrow{P_iO}$ sunt vectori coliniari, $i \in \{1,2\}$.

**Soluție**:
Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*, $G \ne O$
Atunci $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\cdot\overrightarrow{PG}$, pentru orice punct *P* din plan **(2p)**
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ şi $\overrightarrow{PO}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\overrightarrow{PG}$ şi $\overrightarrow{PO}$ sunt coliniari, echivalent cu $P, G, O$ coliniare. **(3p)**
Aşadar punctele $P_1$ şi $P_2$ sunt intersecția dintre $GO$ şi cercul exterior **(2p)**

**Subiectul 4.** O lăcustă sare pe un plan astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mari decât a săriturii precedente. Poate lăcusta să se întoarcă vreodată în locul de plecare?

**Soluție**:
Notăm cu $x>0$ lungimea primei sărituri **(1p)**
Să presupunem că după *n* sărituri lăcusta se întoarce în punctul de plecare
Atunci drumul său va fi o linie frântă închisă $A_1A_2A_3...A_nA_1$ cu lungimile laturilor de $x, 2x, 4x, ..., 2^{n-1}x$ **(3p)**
Atunci avem $A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n > A_nA_1$ $<=> x+2x+4x+...+2^{n-2}x > 2^{n-1}x <=>$
$<=> 1+2+4+...+2^{n-2} > 2^{n-1} <=> 2^{n-1}-1 > 2^{n-1}$ (Fals!) **(3p)**
Aşadar lăcusta nu se poate întoarce în punctul de plecare.