COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”

Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea

Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 17 martie 2012

Clasa a VIII-a – Soluții şi barem

Subiectul 1. a) Să se afle câte perechi de numere întregi (a,b) verifică inegalitatea $a^2+b^2+2\le 2a+6b$.

b) Ştiind că $x^2+y^2+2\le 2x+6y$, cu $x,y\in\mathbb{R}$ să se arate că $0\le x+y\le 8$.

Soluție:

a) $a^2+b^2+2\le 2a+6b <=> (a-1)^2+(b-3)^2\le 8$ **(1p)**

Deoarece $a,b\in\mathbb{Z}$ avem că $(a-1),(b-3)\in\{\pm 2,\pm 1,0\}$ **(1p)**

Aşadar obținem 25 perechi (a,b) **(2p)**

b) Vom folosi inegalitatea $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge\left|\frac{x+y}{2}\right|$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

Din $x^2+y^2+2\le 2x+6y <=> (x-1)^2+(y-3)^2\le 8$ şi inegalitatea de mai sus avem

$$2=\sqrt{\frac{8}{2}}\ge\sqrt{\frac{(x-1)^2+(y-3)^2}{2}}\ge\left|\frac{(x-1)+(y-3)}{2}\right| <=> 4\ge|x+y-4|$$

$<=> 4\ge x+y-4\ge -4 <=> 0\le x+y\le 8$ **(3p)**

Subiectul 2. Fie $n\ge 2$ un număr natural. Arătați că are loc inegalitatea $\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 4^2}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)^2}<\frac{1}{6}$.

Vom folosi inegalitatea $\frac{1}{k\cdot(k+1)^2}\le\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)} <=>$

$<=> k+2\le(k+1)(k+2)-k(k+1) <=> k+2\le k^2+3k+2-k^2-k <=> k+2\le 2k+2$ **(3p)**

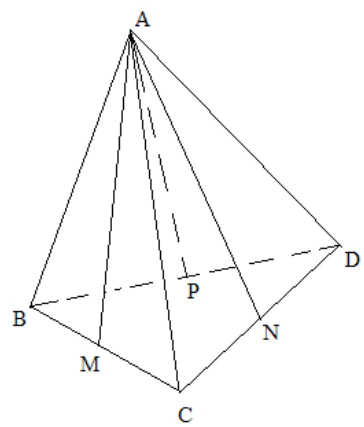
Dându-i lui k valorile 2, 3, …, n şi însumând obținem

$$\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 4^2}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)^2}\le\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}<\frac{1}{6}$$ **(4p)**

Subiectul 3. Fie *ABCD* un tetraedru în care medianele din *A* corespunzătoare fețelor *ABC*, *ABD* şi *ACD* sunt perpendiculare două câte două.

Să se arate că proiecția punctului *A* pe planul *BCD* este centrul cercului circumscris triunghiului *BCD*.

Soluție:



Din $AP \perp AM$ şi $AP \perp AN$ avem că $AP \perp (AMN)$, adică $AP \perp MN$ **(2p)**

Deoarece MN este linie mijlocie => $MN \parallel BD$ şi atunci $AP \perp BD$ **(1p)**

În ΔABD AP este mediană şi înălțime, deci ΔABD este isoscel cu $AB = AD$ **(1p)**

Analog se obțin că $AB = AC = AD$ şi de aici rezultă că proiecția punctului *A* pe (*BCD*) este centrul cercului circumscris $\Delta\, BCD$ **(3p)**

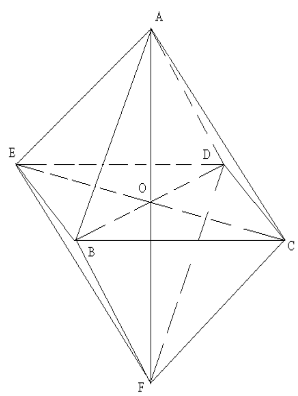
Subiectul 4. Două piramide patrulatere regulate au aceeaşi bază *BCDE* şi vârfurile *A* şi *F*. Toate muchiile (muchii laterale şi laturi ale bazei) au lungimea de 6*m*.

a) Arătați că planele (*ABC*) şi (*DEF*) sunt paralele;

b) Determinați distanța dintre planele (*ABC*) şi (*DEF*);

c) Determinați distanța dintre dreptele *AB* şi *DE*.

Soluție:



a) Din $AO \perp (BCD)$ şi $FO \perp (BCD)$ avem că A, O, F sunt coliniare

Din $\Delta ABD \equiv \Delta FBD$ se obține $AO = FO$

$ABFD$ şi $ACFE$ sunt paralelograme (pentru că diagonalele se înjumătățesc) => $AB \parallel FD$ şi $AC \parallel EF$ şi de aici $(ABC) \parallel (DEF)$ **(3p)**

b) $d((ABC),(DEF)) = d(A,(DEF)) = 2d(O,(DEF)) = 2OT$, unde $OT \perp (DEF)$ **(1p)**

Fie *M* mijlocul lui (*ED*), atunci *OT* este înălțime în triunghiul dreptunghic *FOM* **(1p)**

Atunci $OT = \dfrac{OM \cdot OF}{MF} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ şi de aici $d((ABC),(DEF)) = 2\sqrt{6}$ **(1p)**

c) Din a) şi b) se obține $d(AB, DE) = 2\sqrt{6}$ **(1p)**