COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 17 martie 2012

Clasa a VII-a – Soluții şi barem

Subiectul 1. Să se determine numerele naturale nenule a,b,c astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1$ şi $a\le b\le c$.

Soluție: Din $a\le b\le c$ avem $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\le\frac{4}{a}$ $=> a\le 4$ **(1p)**

Dacă $a=1$ atunci $\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=0$ imposibil **(1p)**

Dacă $a=2$ atunci $\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=\frac{1}{2} <=> b=\frac{2c}{c-4}$

Din $c-4\,|\,2c => c-4\,|\,8 => c-4\in\{1,2,4,8\}$

Ținând cont de $a\le b\le c$ se obțin 1) $c=6,b=6$

2) $c=8,b=4$

3) $c=12,b=3$ **(3p)**

Dacă $a=3$ atunci $\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=\frac{2}{3} <=> b=\frac{3c}{2c-6}$

Din $2c-6\,|\,3c => 2c-6\,|\,18 => 2c-6\in\{1,2,3,6,9,18\}$

Ținând cont de $a\le b\le c$ se obține $c=6,b=3$ **(1p)**

Dacă $a=4$ atunci $\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=\frac{3}{4} <=> b=\frac{4c}{3c-8}$

Din $3c-8\,|\,4c => 3c-8\,|\,32 => 3c-8\in\{1,2,4,8,16,32\}$

Ținând cont de $a\le b\le c$ se obține $c=4,b=4$ **(1p)**

Subiectul 2. Aflați *n* număr natural ştiind că $a = 2^n + 4^n + 115^n$ este pătrat perfect.
Soluție:
Cazul I: *n* impar

1) $n = 1 \Rightarrow a = 2 + 4 + 125 = 121$ pătrat perfect **(2p)**

2) $n \geq 3 \Rightarrow a = M_4 + M_4 + (M_4 - 1)^n = M_4 + M_4 - 1 = M_4 - 1$ nu e pătrat perfect **(2p)**

Cazul II: *n* par $\Rightarrow n = 2k$

Din $a > 115^{2k} = (115^k)^2$ şi din $a = 2^{2k} + 4^{2k} + 115^{2k} \leq 115^k + 115^k + (115^k)^2 < (115^k + 1)^2$ se obține că $(115^k)^2 < a < (115^k + 1)^2$

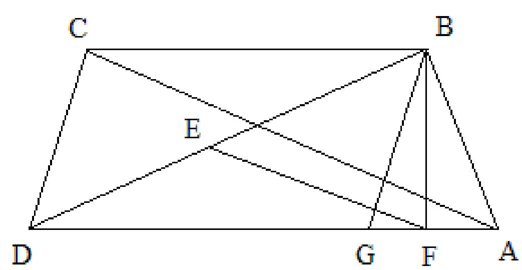
Deci *a* nu este pătrat perfect **(3p)**
Aşadar *a* este pătrat perfect dacă şi numai dacă $n = 1$

Subiectul 3. Fie trapezul *ABCD* (*AD* || *BC* şi *AD* > *BC*), *E* mijlocul diagonalei (*BD*) şi *F* piciorul perpendicularei din *B* pe dreapta *AD*.

a) Dacă $(AB) \equiv (CD)$, arătați că: $EF \parallel AC$ şi $EF = \dfrac{AC}{2}$;

b) Arătați că *ABCD* este isoscel dacă şi numai dacă simetricul lui *C* față de *E* coincide cu simetricul lui *A* față de *F*.

Soluție:



a) În triunghiul dreptunghic *BFD*, *FE* este mediană $\Rightarrow EF = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{AC}{2}$ **(2p)**

ΔDEF este isoscel
$\Rightarrow \sphericalangle DFE \equiv \sphericalangle EDF \equiv \sphericalangle CAD \Rightarrow EF \parallel AC$ **(2p)**

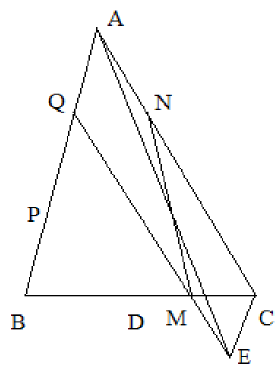
b) Fie *G* intersecția dintre *AD* şi paralela prin *B* la *CD*.
BCDG este paralelogram şi atunci *G* şi *C* sunt simetrice față de *E* .
$(AB) \equiv (CD) \Leftrightarrow (AB) \equiv (BG) \Leftrightarrow (AF) \equiv (FG)$ **(3p)**

COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Subiectul 4. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ pe laturile triunghiului astfel încât $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB} = \alpha$, $\alpha > 1$, D mijlocul segmentului $[BC]$, E simetricul lui A față de mijlocul segmentului $[MN]$.

Să se arate că punctele P, D şi E sunt coliniare.

Soluție:



Fie $\{Q\} = EM \cap AB$

Din $ANEM$ paralelogram avem că $MQ \parallel AC$ **(2p)**

Din Teorema Thales obținem $\frac{MB}{MC} = \frac{QB}{QA} = \alpha$ **(1p)**

$\Rightarrow AQ = PB \Rightarrow \frac{QB}{QA} = \frac{NC}{NA} = \alpha \Rightarrow NQ \parallel MC$

Se obține $NQMC$ paralelogram şi $QM = NC$ **(1p)**

(2p)

Cum $ME = AN \Rightarrow AC = QE$ şi din $AC \parallel QE \Rightarrow ACEQ$ paralelogram **(1p)**

Atunci $CE = BP$ şi $CE \parallel BP \Rightarrow BPCE$ paralelogram $\Rightarrow P, D, E$ coliniare **(2p)**