COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 17 martie 2012

Clasa a XI-a – Soluții şi barem

Subiectul 1. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det(A^2 + B^2) = 0$.

a) Să se arate că $\det A = \det B$;

b) Dacă în plus $\det A \neq 0$ atunci $A^2 + B^2 = O_2$.

Soluție:

a) $AB = BA => A^2 + B^2 = (A - iB)(A + iB)$ şi $\det(A^2 + B^2) = \det(A - iB)\det(A + iB)$ **(1p)**

Deoarece $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ obținem că $\det(A^2 + B^2) = |\det(A - iB)|^2$ **(1p)**

Aşadar $\det(A - iB) = 0 <=> \det A - \det B + \alpha i = 0$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ **(1p)**

Deci $\det A - \det B = 0 <=> \det A = \det B$ **(1p)**

b) Avem $A^2 + B^2 = A^2(I_2 + (A^{-1}B)^2)$ şi din ipoteză $\det(I_2 + (A^{-1}B)^2) = 0$

Notăm $C = A^{-1}B \in M_2(\mathbb{R})$ şi avem $\det(I_2 + C^2) = 0$ **(1p)**

Din ecuația caracteristică obținem $C^2 = a \cdot C + b \cdot I_2$, unde $a = tr(C)$ şi $b = \det(C)$

Atunci $\det(I_2 + a \cdot C - b \cdot I_2) = 0 => a^2 + (1 - b)^2 = 0 => a = 0, b = 1$ **(1p)**

Deci $C^2 = a \cdot C + b \cdot I_2 = -I_2 <=> C^2 + I_2 = O_2 <=> A^2 + B^2 = O_2$ **(1p)**

Subiectul 2. Fie $n \geq 2$ şi $f : M_n(\mathbb{C}) \to \{0, 1, 2, ..., n\}$ o funcție surjectivă cu proprietatea că $f(AB) \leq f(A)$ pentru orice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Arătați că $f(A) = rang(A)$, pentru orice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Soluție:

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, B inversabilă. Atunci $f(A) \geq f(AB) \geq f(ABB^{-1}) = f(A)$ **(1p)**

Deci, dacă B este inversabilă, atunci $f(AB) = f(A)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ şi analog $f(BA) = f(A)$. **(1p)**

Consider $rang(A) = r$ şi atunci există $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $UAV = I_{n.r} \in M_n(\mathbb{C})$, unde $I_{n.r}$ are r de 1 pe diagonala principală şi restul elementelor 0). **(2p)**

Atunci vom avea că $f(A)=f(UAV)=f(I_{n.r})$ şi constatăm că orice două matrice de rang r au aceeaşi imagine şi anume $f(I_{n.r})$.

Atunci putem spune că imaginea lui f este inclusă în $\{f(I_{n,0}=O_n), f(I_{n,1}),..., f(I_{n,n}=I_n)\}$

Deoarece f este surjectivă rezultă că $f(I_{n,r})$ sunt diferite două câte două **(1p)**

Cum $I_{n,k}=I_{n,k+1}I_{n,k}$ rezultă că $f(I_{n,k})\le f(I_{n,k+1})$ şi din $f(I_{n,r})$ distincte două câte două avem că $f(I_{n,0})<f(I_{n,1})<...<f(I_{n,n})$ **(1p)**

Cum $\{f(I_{n,0}), f(I_{n,1}),..., f(I_{n,n})\}=\{1,2,...,n\}$ se obține că $f(I_{n,k})=k$, pentru orice k

Aşadar, dacă $rang(A)=r$ atunci $f(A)=f(I_{n.r})=r$ **(1p)**

Subiectul 3. Fie şirurile $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(b_n)_{n\ge1}$.

i) Dacă $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_{n+1-k}}{n}=0$;

ii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, $a,b\in\mathbb{R}$ şirul definit prin $x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_{\sigma(k)}}{n}$, unde $\sigma\in S_n$, este convergent la $a\cdot b$.

Soluție:

i) Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in\mathbb{R}$ şi din Lema Cesaro-Stolz avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}=a^2$ (1) şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}{n}=0$ (2) **(2p)**

Conform inegalității CBS avem

$0\le(a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1)^2\le(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$ => **(1p)**

$$0\le\left(\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1}{n}\right)^2\le\left(\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}\right)\left(\frac{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}{n}\right)$$

Folosind (1) şi (2) şi criteriul cleştelui avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1}{n}=0$ **(1p)**

ii) Fie $y_n=b_n-b\to0$. Procedând ca la i) avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_{\sigma(1)}+...+a_nb_{\sigma(n)}}{n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b(a_1+...+a_n)}{n}+\frac{a_1y_{\sigma(1)}+...+a_ny_{\sigma(n)}}{n}=b\cdot a+0=a\cdot b$$ **(3p)**

COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”

Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea

Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Subiectul 4. Fie $k \geq 1$ şi $f:[a,b]\to[a,b]$ o funcție care verifică $|f(x)-f(y)|<|x-y|^k$ pentru orice $x, y\in[a,b]$ cu $x\neq y$. Arătați că ecuația $f(x)=x$ are exact o soluție.

Soluție:

Caz 1. $k=1$. Observăm că *f* este continuă **(1p)**

Cum $g(x)=f(x)-x$ verifică relațiile $g(a)=f(a)-a\geq 0$ şi $g(b)=f(b)-b\leq 0$

şi *g* este continuă există $x_0\in[a,b]$ cu $g(x_0)=0$, adică $f(x_0)=x_0$ **(1p)**

Dacă ar exista $x_1\neq x_0$ cu $f(x_1)=x_1$ atunci $|x_1-x_0|=|f(x_1)-f(x_0)|<|x_1-x_0|$, fals

Deci soluția este unică **(1p)**

Caz 2. $k>1$. Fie $x\in[a,b]$ şi $y>0$ oarecare astfel ca $a\leq x+y\leq b$

Atunci pentru orice $n\geq 2$ avem $\left|f\left(x+y\frac{i+1}{n}\right)-f\left(x+y\frac{i}{n}\right)\right|<\frac{y^k}{n^k}$, oricare ar fi

$i=\overline{1,n-1}$ **(2p)**

Însumând după $i=0,1,\ldots,n-1$ obținem

$$|f(x+y)-f(x)|\leq\sum_{i=0}^{n-1}\left|f\left(x+y\frac{i+1}{n}\right)-f\left(x+y\frac{i}{n}\right)\right|<n\frac{y^k}{n^k}=\frac{y^k}{n^{k-1}}$$ **(1p)**

Pentru $n\to+\infty$ obținem $f(x+y)=f(x)$ şi cum *y* a fost ales oarecare rezultă că f este constantă. Atunci $f(x)=x$ are exact o soluție **(1p)**