COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 17 martie 2012

Clasa a X-a – Soluții şi barem

Subiectul 1. Să se determine mulțimea $A=\left\{|z| \;\middle|\; z\in\mathbb{C} \text{ şi } \left|z+\frac{1}{z+1}\right|=1\right\}$.

Soluție:

Din $\left|z+\frac{1}{z+1}\right|=1$ obținem $|z^2+z+1|=|z+1|$

Notăm cu $z=a+ib$, $|z|=r$ şi folosind relațiile $z\cdot\bar{z}=r^2$ şi $z+\bar{z}=2a$ obținem

$(z^2+z+1)(\bar{z}^2+\bar{z}+1)=(z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow 4a^2+2r^2a+r^4-2r^2=0$ **(3p)**

$a\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta_a\geq 0 \Rightarrow r\in\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$.

Aşadar $A\subset\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$ **(2p)**

Fie $t\in\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$.

Atunci pentru $z=a+bi$ cu $a=\frac{-t^2+t\sqrt{8-3t^2}}{4}$ şi $|a+bi|=t$ obținem $|z^2+z+1|=|z+1|$

astfel că $\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]\subset A$

Deci $A=\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$ **(2p)**

Subiectul 2. Să se rezolve ecuația $(x-1)(x-3)=3^{x+1}$.

Soluție:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-3)$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3^{x+1}$

Pe intervalul $(-\infty,1)$ f este strict descrescătoare, iar g este strict crescătoare, aşadar ecuația $f(x)=g(x) <=> (x-1)(x-3)=3^{x+1}$ are cel mult o soluție în $(-\infty,1)$

Deoarece $f(0)=g(0)$ rezultă că $x=0$ este unica soluție din $(-\infty,1)$ **(3p)**

Dacă $x\in 1,3$ atunci $f(x)\le 0$ şi $g(x)>0$, deci ecuația $f(x)=g(x)$ nu are soluții în $1,3$ **(1p)**

Pe intervalul $(3,+\infty)$ atunci *f* este strict crescătoare, iar *g* este strict crescătoare

Notăm $n=[x]$ $<=> n\le x<n+1$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$

Obținem inegalitățile $f(n)\le f(x)<f(n+1)$ şi $g(n)\le g(x)<g(n+1)$

Prin inducție se arată că $f(n+1)<g(n) <=> n(n-2)<3^{n+1}$, $\forall n\ge 3$

Atunci din $f(n)\le f(x)<f(n+1)<g(n)\le g(x)<g(n+1)$ obținem că ecuația $f(x)=g(x)$ nu are soluții în $(3,+\infty)$ **(3p)**

Deci $x=0$ este singura soluție

Subiectul 3. Să se determine $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ astfel încât $7f(x)-3f(f(x))=2x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.

Soluție:

$7f(x)-3f(f(x))=2x <=> 3(f(f(x))-2f(x))=f(x)-2x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ **(2p)**

Înlocuind *x* cu $f(x)$ obținem $3(f(f(f(x)))-2f(f(x)))=f(f(x))-2f(x)$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

Atunci $3^2(f(f(f(x)))-2f(f(x)))=f(x)-2x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ **(1p)**

Prin inducție se obține că $3^n(f_n(x)-2f_{n-1}(x))=f(x)-2x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$, unde $f_k=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } k \text{ ori}}$. **(1p)**

Deoarece $x, f(x)\in\mathbb{Z}$ avem că $3^n \mid f(x)-2x$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

Atunci $f(x)-2x=0 <=> f(x)=2x$ $\forall x\in\mathbb{Z}$ **(3p)**

COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Subiectul 4. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, şi funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$. Arătați că dacă $f(x_1) = f(x_2) = 0$ atunci există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_1 - x_2 = k\pi$.

Soluție:

Fie $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(a_1 + x) + \frac{1}{2}\sin(a_2 + x) + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\sin(a_n + x)$ **(1p)**

Atunci $f(x) + ig(x) = \cos(a_1 + x) + i\sin(a_1 + x) + \frac{1}{2}\left(\cos(a_2 + x) + i\sin(a_2 + x)\right) + ...$

$$... + \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos(a_n + x) + i\sin(a_n + x)\right) =$$

$= (\cos x + i\sin x)\left[\cos a_1 + i\sin a_1 + \frac{1}{2}\left(\cos a_2 + i\sin a_2\right) + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos a_n + i\sin a_n\right)\right]$

$= (\cos x + i\sin x)r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$= r(\cos(x + \alpha) + i\sin(x + \alpha))$, $r \neq 0$ **(2p)**

$r \neq 0$ pentru că dacă am presupune $r = 0$ atunci

$\cos a_1 + i\sin a_1 = -\frac{1}{2}\left(\cos a_2 + i\sin a_2\right) - ... - \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos a_n + i\sin a_n\right)$ şi prin trecere la modul

şi aplicarea inegalității modulului obținem $1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 1 \leq 1 - \frac{1}{2^n}$ (Fals!) **(2p)**

Din $f(x_1) = 0$ avem $\cos(x_1 + \alpha) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\alpha + \frac{2k_1 + 1}{2}\pi$, cu $k_1 \in \mathbb{Z}$

Analog din $f(x_1) = 0$ avem $x_2 = -\alpha + \frac{2k_2 + 1}{2}\pi$, cu $k_2 \in \mathbb{Z}$

Aşadar $x_1 - x_2 = \frac{2k_1 - 2k_2}{2}\pi = k\pi$, cu $k \in \mathbb{Z}$ **(2p)**